

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΦΥΣΙΚΟΥΣ (ΜΑΣ 006)

Ενδιάμεση εξέταση
Σάββατο 19 Νοεμβρίου, 2016

1. (α) Να δειχθεί ότι

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log \left(\frac{i+z}{i-z} \right).$$

Να λυθεί η εξίσωση $\tan z = -1 + 2i$.

(β) Να δειχθεί ότι $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

Να βρεθούν όλες οι ρίζες της εξίσωσης $\cos z = \cosh 2$.

2. (α) (i) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \frac{dz}{\bar{z}}$, όπου το περίγραμμα C είναι ο κύκλος $9x^2 + 9y^2 = 16$.

(ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \operatorname{Im}(e^z) dz$, όπου το περίγραμμα C είναι το ορθογώνιο με κορυφές τα σημεία $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(2, \frac{\pi}{2})$, $(1, \frac{\pi}{2})$.

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \frac{3z+5}{z^2+1} dz$, όπου C είναι ο κύκλος

(i) $|z+i|=1$, (ii) $|z-i|=1$, (iii) $|z-i|=3$ και (iv) $|z+1|=1$.

3. Να βρεθούν δύο αναπτύγματα σειράς Laurent της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{z-1}{z(z-2)^3}$$

σε δυνάμεις του $z-2$ και να δοθεί ο δακτύλιος σύγκλισης.

4. Να βρεθούν τα μεμονωμένα σημεία ανωμαλίας των συναρτήσεων

$$f(z) = \frac{z^3}{(1+z)^3}, \quad g(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}, \quad h(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}, \quad k(z) = \frac{1-\cos z}{z}$$

και να ταξινομηθούν ως πόλος (να δοθεί η τάξη) ή ουσιώδες ή διορθώσιμο σημείο ανωμαλίας. Στη συνέχεια να βρεθούν τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα.

5. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 4z + 1}, \quad C : |z| = 1$$

και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{2 + \cos \theta}.$$

6. (α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2 - 1} dz, \quad C : |z - 1| = \frac{3}{2}.$$

(β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\tan^2 z = -1$ δεν έχει λύσεις.

Βοηθητικοί Τύποι

$$\sin(ix) = i \sinh x \quad \text{και} \quad \cos(ix) = \cosh x$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$$

$$\cosh(A \pm B) = \cosh A \cosh B \pm \sinh A \sinh B$$

$$\sinh(A \pm B) = \sinh A \cosh B \pm \sinh B \cosh A$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots, \quad |z| < 1$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \quad |z| < \infty$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \quad |z| < \infty$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad |z| < \infty$$