ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΦΥΣΙΚΟΥΣ
(ΜΑΣ 006)

Ενδιάμεση εξέταση
Σάββατο 21 Νοεμβρίου, 2015

---

1. (α) Να δειχθεί ότι

$$\sin^{-1} z = -\mathrm{i}\log\left[\mathrm{i}z + \sqrt{1-z^2}\right].$$

Να υπολογιστεί το $\sin^{-1}(\frac{5}{4})$.

(β) Να δειχθεί ότι $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.
Να βρεθούν όλες οι ρίζες της εξίσωσης $\sin z = i \sinh 1$.

2. (α) (i) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C |z|^2 \mathrm{d}z$, όπου το περίγραμμα C είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0),\ (1,0),\ (1,1),\ (0,1)$.

(ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C (x^2+iy^2)\mathrm{d}z$, όπου το περίγραμμα C είναι τα ευθύγραμμα τμήματα από 0 ως $1+i$ και από $1+i$ ως $1+2i$.

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C \frac{3z+5}{z^2+z}\mathrm{d}z$, όπου C είναι ο κύκλος
(i) $|z+\frac{1}{2}|=1$ και (ii) $|z+1|=\frac{1}{2}$.

3. Να βρεθούν τα αναπτύγματα της σειράς Laurent της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{3z-1}{z^2-2z-3}$$

τα οποία να ισχύουν στους δακτύλιους (i) $1<|z|<3$, (ii) $|z|>3$ και (iii) $|z|<1$.

4. Να δειχθεί ότι

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2+8z+1} = \frac{\pi i}{\sqrt{15}},$$

όπου C είναι ο κύκλος $|z|=1$.
Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{4+\cos\theta}.$$

5. (α) Να δειχθεί ότι το σημείο $z = 0$ είναι απλός πόλος της συνάρτησης $f(z) = \dfrac{2 + \mathrm{e}^z}{\sin z + z\cos z}$ και στη συνέχεια να βρεθεί το αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο.

(β) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\displaystyle\int_C \sin\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z, \quad C:\ |z| = 1$

(ii) $\displaystyle\int_C z^2\sin\frac{1}{z}\mathrm{d}z, \quad C:\ |z| = 1$

(iii) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z\cosh z}\mathrm{d}z, \quad C:\ |z| = 1$ $\qquad$ [$\cosh z = 0 \Rightarrow z = (\frac{\pi}{2} + n\pi)i$]

6. (α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{z^3\mathrm{d}z}{z^2 + 2iz + 8},$$

όπου C είναι ο κύκλος $|z| = 3$.

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^2 + 9)(z - 1)^2},$$

όπου C είναι το ορθογώνιο με κορυφές τα σημεία $2 - 4i,\ 2 + i,\ -1 + i$ και $-1 - 4i$.

Βοηθητικοί Τύποι

$\sin(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\sinh x$ και $\cos(\mathrm{i}x) = \cosh x$

$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$

$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \sin B\cos A$

$\cosh(A \pm B) = \cosh A\cosh B \pm \sinh A\sinh B$

$\sinh(A \pm B) = \sinh A\cosh B \pm \sinh B\cosh A$

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots, \qquad |z| < 1$$

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots \qquad |z| < \infty$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \qquad |z| < \infty$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots \qquad |z| < \infty$$