ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΦΥΣΙΚΟΥΣ
(ΜΑΣ 006)

Ενδιάμεση εξέταση

Σάββατο 9 Νοεμβρίου, 2013

---

1. (α) Να απλοποιηθεί ο μιγαδικός αριθμός $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^8$ στη μορφή $a+ib$.

(β) Να λυθεί η εξίσωση $z^4+1=0$. (Οι ρίζες να δοθούν στη μορφή $a+ib$.)

(γ) Να περιγραφεί γεωμετρικά το σύνολο των σημείων $\{z: \ |z-2|>|z-3|\}$.

2. Να λυθεί η εξίσωση $z^5-1=0$. Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση

$$(1+z)^5=(1-z)^5.$$

3. (α) Έστω η συνάρτηση $f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}\right)$. Να δειχθεί ότι το όριο $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ δεν υπάρχει.

(β) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(z)=\begin{cases} \frac{(\mathrm{Re}\ z)^2(\mathrm{Im}\ z)}{|z|^2}, & z\neq 0 \\ k, & z=0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $z=0$.

(γ) Έστω η συνάρτηση $f(z)=x^2+iy^2$. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η f είναι
(i) παραγωγίσιμη και (ii) αναλυτική.

4. Να δοθούν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann σε πολικές συντεταγμένες.
Έστω

$$u(x,y)=\frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}.$$

Να δειχθεί ότι υπάρχει αναλυτική συνάρτηση της μορφής $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$, όπου $v(r,\theta)$ συνάρτηση προς υπολογισμό. Στη συνέχεια να εκφραστεί η $f(z)$ ως συνάρτηση μόνο του z.

5. Αν $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, όπου $z = x + iy$, είναι αναλυτική συνάρτηση, να δοθούν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann οι οποίες ικανοποιούνται από τις συναρτήσεις $u(x, y)$ και $v(x, y)$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x, y)$ είναι αρμονική. Δηλαδή, η συνάρτηση $u(x, y)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση του Laplace.

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 3x$ είναι αρμονική. Στη συνέχεια να βρεθεί η αναλυτική συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, ως συνάρτηση μόνο του z, όπου $v(x, y)$ είναι η αρμονική συζυγής της $u(x, y)$.

6. (α) Να δειχθεί ότι

$$\cos^{-1} z = -i \log \left[z + \sqrt{z^2 - 1} \right].$$

Να υπολογιστεί το $\cos^{-1}(i)$.

(β) Να δειχθεί ότι $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$.
Να λυθεί η εξίσωση $\sinh z = i\sqrt{3}$.

7. (α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_C \left(z^2 + \bar{z}^2 \right) \mathrm{d}z,$$

όπου C είναι

(i) το ευθύγραμμο τμήμα από το $z = -i$ στο $z = i$

(ii) το ημικύκλιο από το $z = -i$ στο $z = i$ που βρίσκεται στο δεξιό ημι-επίπεδο.

(β) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2 - 4)(z^2 + 4)} \mathrm{d}z$, όπου C είναι ο κύκλος $|z| = 1$.

(ii) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z - 2)^3 (z + 2)}$, όπου C είναι ο κύκλος $|z - 2| = 2$.

8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{\cos z}{z} \mathrm{d}z,$$

όπου C είναι ο κύκλος $|z| = 1$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \cos(\cos t) \cosh(\sin t) \mathrm{d}t.$$

Βοηθητικοί Τύποι

$\sin(\mathrm{i}x) = \mathrm{i} \sinh x$ και $\cos(\mathrm{i}x) = \cosh x$

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

$\cosh^2 A - \sinh^2 A = 1$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$