ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΦΥΣΙΚΟΥΣ
(ΜΑΣ 006)

Ενδιάμεση εξέταση
Σάββατο 15 Οκτωβρίου, 2016

---

1. (α) Να απλοποιηθεί ο μιγαδικός αριθμός $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{12}$ στη μορφή $a+ib$.

(β) Να λυθεί η εξίσωση $z^4+2iz^2-1=0$.

(γ) Να περιγραφεί γεωμετρικά το σύνολο των σημείων $\{z:\ z\bar{z}\leq 4\text{Im}\, z\}$.

(δ) Να εκφραστεί το $\sin 5\theta$ ως πολυωνυμική συνάρτηση του $\sin\theta$.

2. Να λυθεί η εξίσωση $z^7+1=0$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}.$$

3. (α) Να δειχθεί ότι το όριο $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\bar{z}^2}{z^2}$ δεν υπάρχει.

(β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(z)=\begin{cases}\frac{\text{Im }(z^2)}{|z|}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

είναι συνεχής στο $z=0$.

(γ) Έστω η συνάρτηση $f(z)=\bar{z}(z\bar{z}-2)$. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η f είναι
(i) παραγωγίσιμη και (ii) αναλυτική.

4. Αν $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, όπου $z=x+iy$, είναι αναλυτική συνάρτηση, να δοθούν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann οι οποίες ικανοποιούνται από τις συναρτήσεις $u(x,y)$ και $v(x,y)$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x,y)$ είναι αρμονική. Δηλαδή, η συνάρτηση $u(x,y)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση του Laplace.

Να βρεθεί η αναλυτική συνάρτηση $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, αν είναι γνωστό ότι $u(x,y)=x^3+axy^2$, όπου a είναι σταθερά προς υπολογισμό.

5. Να δοθούν οι εξισώσεις των Cauchy-Riemann σε πολικές συντεταγμένες.
Έστω

$$u(x,y) = \frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}.$$

Να δειχθεί ότι υπάρχει αναλυτική συνάρτηση της μορφής $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$, όπου $v(r,\theta)$ συνάρτηση προς υπολογισμό. Στη συνέχεια να βρεθεί η $f'(z)$ ως συνάρτηση μόνο του z.

6. (α) Αν $|z| = 1$ να δειχθεί ότι $\left|\dfrac{z-2i}{2iz+1}\right| = 1$.

(β) Να βρεθούν ορθογώνιες τροχιές για την οικογένεια καμπυλών $x + \sin x \cosh y = \alpha$.

Βοηθητικοί Τύποι

$\sin(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\sinh x \quad$ και $\quad \cos(\mathrm{i}x) = \cosh x$

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

$\cosh^2 A - \sinh^2 A = 1$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$