ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΦΥΣΙΚΟΥΣ
(ΜΑΣ 006)

Ενδιάμεση εξέταση
Σάββατο 10 Οκτωβρίου, 2015

---

1. (α) Να απλοποιηθεί ο μιγαδικός αριθμός $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{16}$ στη μορφή $a+ib$.

(β) Να δειχθεί ότι $\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$.

(γ) Να περιγραφούν γεωμετρικά οι πιο κάτω ανισώσεις.

$$\text{(i) } 0 < \mathrm{Arg}\frac{z-i}{z+i} < \frac{\pi}{2} \qquad \text{(ii) } \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$$

2. Να λυθεί η εξίσωση $z^5+1=0$. Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση

$$z^5+5z^4+10z^3+10z^2+5z+2=0.$$

3. (α) Έστω η συνάρτηση $f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}\right)$. Να δειχθεί ότι το όριο $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ δεν υπάρχει.

(β) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(z)=\begin{cases} \frac{z^2+iz+6}{z-2i}, & z\neq 2i \\ k, & z=2i \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $z=2i$.

(γ) Έστω η συνάρτηση $f(z)=(x-y)^2+2i(x+y)$. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η f είναι (i) παραγωγίσιμη και (ii) αναλυτική.

4. Να δοθούν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann σε πολικές συντεταγμένες.
Δίνεται ότι $\log z = \ln|z| + i\arg(z),\ z\neq 0$. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Cauchy-Riemann, να βρεθεί η παράγωγος της $\log z$.
Έστω η συνάρτηση $u(r,\theta)=\dfrac{r+\cos\theta}{r}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει αναλυτική συνάρτηση της μορφής $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$, όπου $v(r,\theta)$ συνάρτηση προς υπολογισμό. Στη συνέχεια να εκφραστεί η $f(z)$ ως συνάρτηση μόνο του z. $v=\frac{\sin\theta}{r}+c, f(z)=\frac{1}{z}+1+ic$

5. Αν $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, όπου $z = x + iy$, είναι αναλυτική συνάρτηση, να δοθούν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann οι οποίες ικανοποιούνται από τις συναρτήσεις $u(x,y)$ και $v(x,y)$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x,y)$ είναι αρμονική. Δηλαδή, η συνάρτηση $u(x,y)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση του Laplace.

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\cos y + xy$ είναι αρμονική. Στη συνέχεια να βρεθεί η αναλυτική συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, ως συνάρτηση μόνο του z, όπου $v(x,y)$ είναι η αρμονική συζυγής της $u(x,y)$.

6. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $w = \dfrac{\bar{z} + 2i}{\bar{z} + 2}$, όπου $z = x + iy$.

(α) Να γραφεί ο w στη μορφή $a + ib$.

(β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του z για τις πιο κάτω περιπτώσεις:

(i) $\mathrm{Im}(w) = 0$,

(ii) $\mathrm{Re}(w) = 0$,

(iii) $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Re}(w)$.

Βοηθητικοί Τύποι

$\sin(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\sinh x \quad$ και $\quad \cos(\mathrm{i}x) = \cosh x$

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

$\cosh^2 A - \sinh^2 A = 1$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$