ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΦΥΣΙΚΟΥΣ
(ΜΑΣ 006)

Τελική εξέταση

Τετάρτη 21 Δεκεμβρίου, 2016

Να λυθούν πέντε (5) θέματα.

---

1. (α) Εκφράζοντας το πηλίκο των μιγαδικών αριθμών $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ σε δύο διαφορετικές μορφές, να υπολογιστεί το $\sin\frac{\pi}{12}$ και το $\cos\frac{\pi}{12}$.

(β) Έστω $w = \dfrac{z}{z^2+1}$, όπου z μιγαδικός αριθμός και $z \neq \pm i$.

(i) Αν w είναι πραγματικός αριθμός, τότε να δειχθεί ότι z είναι πραγματικός αριθμός ή $|z| = 1$.

(ii) Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{z}{z^2+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(γ) Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $z^4 + 8 + i8\sqrt{3} = 0$ στη μορφή $a + ib$.

2. (α) Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x + iy$ και $z_2 = \dfrac{2-\bar{z}_1}{2+\bar{z}_1}$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$ και $y \neq 0$. Αν $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$, τότε

(i) να δειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$,

(ii) να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1.

(β) Έστω ότι $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ και έστω ότι η $f'(z)$ υπάρχει στο σημείο $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$. Τότε να δειχθεί ότι οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης των u και v υπάρχουν στο σημείο (x_0, y_0) και ότι ικανοποιούν τις εξισώσεις των Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

3. (α) Να δειχθεί ότι το όριο $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{[\mathrm{Re}(z)]^2}{z^2}$ δεν υπάρχει.

(β) Να δειχθεί ότι η $f(z) = z(\cos x\cosh y - i\sin x\sinh y)$ είναι ακέραια συνάρτηση. Στη συνέχεια να βρεθεί η $f'(z)$ ως συνάρτηση μόνο του z.

(γ) Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς k έτσι ώστε η συνάρτηση $u(x, y) = \cos x(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{ky})$ να είναι αρμονική. Για αυτές τις τιμές της σταθεράς k, να βρεθεί η αρμονική συζυγής της $v(x, y)$ και στη συνέχεια να εκφραστεί η αναλυτική συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ως συνάρτηση του z μόνο.

4. (α) Να εκφραστεί ο μιγαδικός αριθμός $\tan[i\mathrm{Log}(-1-i)]$ στη μορφή $a+ib$.

(β) Να σχεδιαστεί η πολυγωνική γραμμή

$$C : z(t) = \begin{cases} 2+it, & -1 \leq t \leq 1 \\ 2t+i, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C \mathrm{Im}(\overline{iz})\mathrm{d}z$.

(γ) Να λυθεί η εξίσωση $\cos z = 0$.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C \tan z \mathrm{d}z$, όπου C είναι ο κύκλος $|z| = 2$.

5. (α) Να δειχθεί ότι

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z+1} = 1 - \mathrm{e}^{-1}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z+1}\mathrm{d}z, \quad C : \ |z| = 2.$$

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{(z-1)^3(z+2i)}\mathrm{d}z$, όπου C είναι

(i) ο κύκλος $|z| = \frac{1}{2}$,
(ii) ο κύκλος $|z| = \frac{3}{2}$,
(iii) ο κύκλος $|z| = \frac{5}{2}$ και
(iv) το τετράγωνο με κορυφές $(-3,-3),\ (3,-3),\ (3,3),\ (-3,3)$.

6. (α) Να βρεθεί η σειρά Laurent της συνάρτησης $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ η οποία να ισχύει στους πιο κάτω δακτύλιους:

(i) $|z| > 1$, (ii) $0 < |z-1| < 1$, (iii) $1 < |z-2| < 2$.

(β) Έστω η απεικόνιση $T(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$. Να βρεθεί η εικόνα
(i) του δίσκου $|z| \leq 1$ και (ii) του δίσκου $|z-i| \leq 1$.

7. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(2+\cos\theta)^2}, \qquad \text{(ii)} \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+9}\mathrm{d}x.$$

Βοηθητικοί Τύποι

$\sin(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\sinh x$ και $\cos(\mathrm{i}x) = \cosh x$

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

$\cosh(A \pm B) = \cosh A \cosh B \pm \sinh A \sinh B$

$\sinh(A \pm B) = \sinh A \cosh B \pm \sinh B \cosh A$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots, \qquad |z| < 1$$

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots \qquad |z| < \infty$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \qquad |z| < \infty$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots \qquad |z| < \infty$$