ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΦΥΣΙΚΟΥΣ
(ΜΑΣ 006)

Τελική εξέταση
Τετάρτη 16 Δεκεμβρίου, 2015

Να λυθούν πέντε (5) θέματα.

---

1. (α) Να απλοποιηθεί ο μιγαδικός αριθμός $\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{12}$ στη μορφή $a+ib$.

(β) Να περιγραφούν γεωμετρικά τα σύνολα των σημείων:
(i) $\{z:\ |z| = \mathrm{Im}\, z + \frac{1}{2}\}$
(ii) $\{z:\ |2iz-1| = 4\}$

(γ) Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $(z+i)^3 + 8i = 0$ στη μορφή $a+ib$.

(δ) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του De Moivre, να δειχθεί ότι

$$\tan(3\theta) = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}.$$

2. (α) Αν $z = x+iy$, να γραφτεί ο μιγαδικός αριθμός $\frac{z-3}{z+3}$ στη μορφή $a+ib$.
Να βρεθεί η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου

$$\mathrm{Arg}\,\left(\frac{z-3}{z+3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(β) Έστω ότι $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ και έστω ότι η $f'(z)$ υπάρχει στο σημείο $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$. Τότε να δειχθεί ότι οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης των u και v υπάρχουν στο σημείο (x_0, y_0) και ότι ικανοποιούν τις εξισώσεις των Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

3. (α) Έστω η συνάρτηση

$$f(z)=\begin{cases}\frac{x^{4/3}y^{5/3}+ix^{5/3}y^{4/3}}{x^2+y^2}, & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}.$$

Να δειχθεί ότι οι εξισώσεις των Cauchy-Riemann ικανοποιούνται στο σημείο $z=0$. Στη συνέχεια να εξεταστεί αν η παράγωγος υπάρχει στο $z=0$.

(β) Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι αναλυτικές.
(i) $f(z)=\sin(\bar{z})$
(ii) $f(z)=[x(3x+7)+y(1-3y)]+i[x(6y-1)+7y]$
Στη περίπτωση που είναι αναλυτική, να εκφραστεί η $f'(z)$ συναρτήσει του z.

(γ) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$ είναι αρμονική. Να βρεθεί η αρμονική συζυγής συνάρτηση $v(x,y)$ και στη συνέχεια να εκφραστεί η αναλυτική συνάρτηση $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ως συνάρτηση του z μόνο.

4. (α) Να εκφραστεί ο μιγαδικός αριθμός $\tan[i\mathrm{Log}(-1-i)]$ στη μορφή $a+ib$.

(β) Να λυθεί η εξίσωση $\sinh z=i\sqrt{2}$.

(γ) Να βρεθεί το μέτρο το μιγαδικού αριθμού $z=\tanh\frac{(1+i)\pi}{4}$.

5. (α) Έστω ότι C είναι το θετικό απλό κλειστό περίγραμμα που αποτελείται από τον πραγματικό άξονα από το σημείο -2 ως 2 και από το ημικύκλιο $|z|=2$ από το 2 ως το -2. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)}\ \int_C \bar{z}\mathrm{d}z,\qquad \text{(ii)}\ \int_C \mathrm{e}^{z^2}\mathrm{d}z,\qquad \text{(iii)}\ \int_C \frac{\mathrm{e}^z\mathrm{d}z}{(z+i)(z-i)^2}.$$

(β) Να αναλυθεί σε μερικά κλάσματα η συνάρτηση

$$f(z)=\frac{1}{z^2+3z+2}.$$

Να βρεθούν τα αναπτύγματα της σειράς Laurent της συνάρτησης $f(z)$ σε δυνάμεις του $(z-1)$ τα οποία να ισχύουν στις περιοχές (i) $|z-1|<2$ και (ii) $2<|z-1|<3$, αντίστοιχα.

6. (α) Έστω C είναι το θετικό ορθογώνιο περίγραμμα με κορυφές τα σημεία $-2-i,\ 1-i,\ 1+i,\ -2+i$. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)}\ \int_C z\cos\left(\frac{1}{z+1}\right)\mathrm{d}z,\qquad \text{(ii)}\ \int_C \frac{z+1}{\sin z}\mathrm{d}z.$$

(β) Έστω η απεικόνιση $T(z)=\dfrac{1}{z}$. Να βρεθεί και να σχεδιαστεί η εικόνα της ημι-άπειρης λωρίδας η οποία ορίζεται από της ανισώσεις: $1\le y\le 2,\ x\ge 0$.

7. (α) Αν $z=\mathrm{e}^{i\theta}$, να δειχθεί ότι $\dfrac{2z}{z^2+4z-1}=\dfrac{1}{2+i\sin\theta}$.
Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(2+i\sin\theta)^2}.$$

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}\mathrm{d}x.$$

Βοηθητικοί Τύποι

$\sin(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\sinh x \quad$ και $\quad \cos(\mathrm{i}x) = \cosh x$

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

$\cosh(A \pm B) = \cosh A \cosh B \pm \sinh A \sinh B$

$\sinh(A \pm B) = \sinh A \cosh B \pm \sinh B \cosh A$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots, \qquad |z| < 1$$

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots \qquad |z| < \infty$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \qquad |z| < \infty$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots \qquad |z| < \infty$$