ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΦΥΣΙΚΟΥΣ
(ΜΑΣ 006)

Τελική εξέταση

Παρασκευή 20 Δεκεμβρίου, 2013

Να λυθούν έξι (6) θέματα.

---

1. (α) Να απλοποιηθεί ο μιγαδικός αριθμός $\left(\frac{2+i2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^{18}$ στη μορφή $a+ib$.

(β) Να περιγραφούν γεωμετρικά τα σύνολα των σημείων:
(i) $\{z:\ |z|^2+\operatorname{Im} z=16\}$
(ii) $\{z:\ 0<\operatorname{Im}(z+3i)<4\}$

(γ) Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $z^2+(1+i)z+5i=0$ στη μορφή $a+ib$.

(δ) Να εκφραστεί το $\cos 4\theta$ σε δυνάμεις του $\cos\theta$.

2. (α) Αν z είναι μιγαδικός αριθμός με $|z|=1$, τότε να δειχθεί ότι $2\cos n\theta = z^n+\frac{1}{z^n}$, όπου θ είναι το όρισμα του z.
Δίνεται η εξίσωση

$$5z^4-11z^3+16z^2-11z+5=0.$$

Αν z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε να δειχθεί ότι η $\frac{1}{z_1}$ είναι επίσης ρίζα.
Να δειχθεί ότι οι ρίζες της εξίσωσης έχουν μέτρο ίσο με 1 και στη συνέχεια να βρεθούν οι ρίζες.

(β) Έστω ότι $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ και έστω ότι η $f'(z)$ υπάρχει στο σημείο $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$. Τότε να δειχθεί ότι οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης των u και v υπάρχουν στο σημείο (x_0,y_0) και ότι ικανοποιούν τις εξισώσεις των Cauchy-Riemann

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x.$$

3. (α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z-i}{z^2-3iz-2}, & z \neq i, 2i \\ k, & z = i \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $z = i$. Στη συνέχεια να δειχθεί ότι δεν είναι συνεχής στο $z = 2i$.

(β) Να δειχθεί ότι η $f(z) = z(\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y)$ είναι ακέραια συνάρτηση. Στη συνέχεια να βρεθεί η $f'(z)$.

(γ) Να δοθούν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann σε πολικές συντεταγμένες.
Να βρεθούν ορθογώνιες τροχιές για την μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών

$$(r^2 + 1) \cos\theta = ar.$$

4. (α) Να δειχθεί ότι

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log\left(\frac{i+z}{i-z}\right).$$

Να λυθεί η εξίσωση $\tan z = 2i$.

(β) Να δειχθεί ότι $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.
Να βρεθούν όλες οι ρίζες της εξίσωσης $\sin z = \cosh 3$.

(γ) Να εκφραστεί ο μιγαδικός αριθμός $\tanh\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{4}\right)$ στη μορφή $a + ib$.

5. (α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C \frac{3z+5}{z^2+z}\mathrm{d}z$, όπου C είναι ο κύκλος
(i) $|z + \frac{1}{2}| = 1$ και (ii) $|z + 1| = \frac{1}{2}$.

(β) Να βρεθούν δύο αναπτύγματα της σειράς Laurent της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{z+3}{z(z^2-4z-5)}$$

τα οποία να ισχύουν στις περιοχές (i) $0 < |z| < 1$ και (ii) $1 < |z| < 5$, αντίστοιχα.

6. (α) Να σχεδιαστεί η πολυγωνική γραμμή

$$C : z(t) = \begin{cases} it, & -1 \leq t \leq 1 \\ 2t - 2 + i, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}.$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C \mathrm{Im}(z)\mathrm{d}z$.

(β) Αν $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, τότε να δειχθεί ότι $\displaystyle\frac{1}{3 + i\sin\theta} = \frac{2z}{z^2+6z-1}$.
Να δειχθεί ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{3 + i\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{10}}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{9 + \sin^2\theta}.$$

7. (α) Να δοθεί ο ορισμός του μεμονωμένου σημείου ανωμαλίας μιας μιγαδικής συνάρτησης $f(z)$ και να προσδιοριστούν τα τρία είδη.

Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{(2z+\pi)\tan z}{z^3}.$$

Να προσδιοριστεί το είδος των σημείων ανωμαλίας

$$\text{(i) } z = 0, \quad \text{(ii) } z = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{(iii) } z = \frac{\pi}{2}.$$

Αν είναι απλός πόλος, να βρεθεί το αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο και αν είναι διορθώσιμο σημείο, να οριστεί η συνάρτηση σε αυτό το σημείο έτσι ώστε να είναι αναλυτική.

(β) Έστω η απεικόνιση $T(z) = \dfrac{i}{z}$. Να βρεθεί η εικόνα του δίσκου $|z - i| \leq 1$.

8. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i) } \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{5 + 4\sin\theta}, \qquad \text{(ii) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 2}\mathrm{d}x.$$

Βοηθητικοί Τύποι

$\sin(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\sinh x$ και $\cos(\mathrm{i}x) = \cosh x$

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

$\cosh(A \pm B) = \cosh A \cosh B \pm \sinh A \sinh B$

$\sinh(A \pm B) = \sinh A \cosh B \pm \sinh B \cosh A$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots, \qquad |z| < 1$$

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \qquad |z| < \infty$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \qquad |z| < \infty$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \qquad |z| < \infty$$