

Ασκήσεις 9

9.1 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$(i) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \sin \theta} \quad (ii) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} \quad (iii) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}$$

9.2 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx \quad (ii) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

$$(iii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx \quad (iv) \int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

9.3 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$(i) \int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x(1 + x^2)} dx \quad (ii) \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} dx$$

9.4 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} \quad (ii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx$$

9.5: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{e^{az}}{1 + e^z} dz, \quad 0 < a < 1,$$

όπου C είναι το ορθογώνιο περίγραμμα

$$[-R, R] \cup [R, R + 2\pi i] \cup [R + 2\pi i, -R + 2\pi i] \cup [-R + 2\pi i, -R].$$

Στη συνέχεια να δειχθεί ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1.$$

9.6 Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση, να δειχθεί ότι

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

9.7 Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση, να υπολογιστούν τα αθροίσματα

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 1)^2}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$$