

## Ασκήσεις 8

**8.1** Να βρεθούν τα σημεία ανωμαλίας και τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(i) \frac{1}{4+z^2} \quad (ii) \frac{\sin z}{z^6} \quad (iii) \cot z \quad (iv) \frac{1}{(z^2-1)^2} \quad (v) \tan z$$

**8.2** Να βρεθούν και να ταξινομηθούν τα σημεία ανωμαλίας των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(i) \frac{1-\cos z}{z} \quad (ii) \frac{1}{ze^z-z} \quad (iii) \frac{1}{e^{z^2}-1} \quad (iv) \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2+1}$$

**8.3** Να βρεθούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των πιο κάτω συναρτήσεων στα σημεία που δίνονται:

$$(i) \frac{e^{imz}}{z^2+a^2}, z=ia \quad (ii) \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}, z=1 \quad (iii) \frac{1}{(z-1)^2(z+1)}, z=1$$

$$(iv) \frac{1}{\cosh z}, z=\frac{\pi i}{2} \quad (v) \frac{\cos z}{\sin z}, z=0 \quad (vi) \frac{1}{1-\cos z}, z=0$$

**8.4** Να βρεθούν οι πόλοι της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{2z}{4z^2-6z+3}$$

και να υπολογιστεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο σε κάθε πόλο.

**8.5** Χρησιμοποιώντας το θεώρημα για ολοκληρωτικά υπόλοιπα, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$(i) \int_C e^{\frac{1}{z}} dz, C: |z|=1 \quad (ii) \int_C \tan \pi z dz, C: |z|=1$$

$$(iii) \int_C \frac{e^z}{\cos z} dz, C: |z|=4.5 \quad (iv) \int_C \frac{e^z}{\cos \pi z} dz, C: |z-i|=1.5$$

$$(v) \int_C \frac{\tan z}{z} dz, C: |z-1|=2 \quad (vi) \int_C \frac{30z^2-23z+5}{(2z-1)^2(3z-1)} dz, C: |z|=1$$

**8.6** Χρησιμοποιώντας το θεώρημα για ολοκληρωτικά υπόλοιπα, ναδειχθεί ότι

$$(i) \int_C \frac{e^{az}}{1+z^2} dz = 2\pi i \sin a, C: |z|=2$$

$$(ii) \int_C \frac{e^{iz}}{z^4+2z^2+1} dz = \frac{\pi}{e}, C: |z|=2$$

$$(iii) \int_C \frac{z+1}{(z-2)(z^2+9)} dz = \frac{\pi}{39}(7+9i), C: |z-3i|=4$$

**8.7** Χρησιμοποιώντας το θεώρημα που αναφέρεται σε ένα ολοκληρωτικό υπόλοιπο, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$(i) \int_C \frac{z^5}{1-z^3} dz \quad (ii) \int_C \frac{1}{1+z^2} dz \quad (iii) \int_C \frac{1}{z} dz$$

όπου  $C$  είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος  $|z|=2$ .

**8.8** Ναδειχθεί ότι τα σημεία ανωμαλίας των πιο κάτω συναρτήσεων είναι πόλοι. Να προσδιοριστεί η τάξη τους και να βρεθούν τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα.

$$(i) \frac{z^2 + 2}{z - 1} \quad (ii) \left( \frac{z}{2z + 1} \right)^3 \quad (iii) \frac{e^z}{z^2 + \pi^2}$$

**8.9** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{3z^3 + 2}{(z - 1)(z^2 + 9)} dz,$$

όπου  $C$  είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος (i)  $|z - 2| = 2$  (ii)  $|z| = 4$ .

**8.10** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z + 4)},$$

όπου  $C$  είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος (i)  $|z| = 2$  (ii)  $|z + 2| = 3$ .

**8.11** Να δειχθεί ότι

$$\operatorname{Res}_{z=\pi i} \frac{z - \sinh z}{z^2 \sinh z} = \frac{i}{\pi}.$$

**8.12** Να δειχθεί ότι

$$\operatorname{Res}_{z=\pi i} \frac{e^{zt}}{\sinh z} + \operatorname{Res}_{z=-\pi i} \frac{e^{zt}}{\sinh z} = -2 \cos \pi t.$$