

Ασκήσεις 7

7.1 Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω ακολουθίες είναι φραγμένες και αν συγκλίνουν.

$$(i) z_n = (-1)^n + \frac{i}{2^n} \quad (ii) z_n = \frac{(-1)^n}{n+i}$$

$$(iii) z_n = \text{Log}(2+i)^n \quad (iv) z_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i^4$$

7.2 Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν.

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+2i)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (iii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-i}{3n+2i}$$

7.3 Να βρεθούν οι σειρές Taylor για τις πιο κάτω συναρτήσεις γύρω από το δοσμένο σημείο και να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης.

$$(i) e^z, -2i \quad (ii) \sin z, \frac{\pi}{2} \quad (iii) z = \frac{1}{1-z}, i \quad (iv) e^{-\frac{z^2}{2}}, 0$$

7.4 Να βρεθεί η σειρά Maclaurin της συνάρτησης σφάλματος

$$\text{erf } z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

7.5 Να βρεθούν οι σειρές Taylor για τις πιο κάτω συναρτήσεις γύρω από το δοσμένο σημείο και να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης.

$$(i) \frac{z}{(z-1)(z+2)}, z=0 \quad (ii) \frac{1}{z^2}, z=1+i \quad (iii) \frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}, z=2$$

7.6 Να εκφραστούν σε σειρές Laurent οι πιο κάτω συναρτήσεις

$$(i) \frac{e^z}{z-1}, z_0=1 \quad (ii) \frac{1}{z^2+1}, z_0=i \quad (iii) \frac{1}{(z+i)^2-(z+i)}, z_0=-i$$

$$(iv) \frac{z^2-4}{z-1}, z_0=1 \quad (v) ze^{\frac{1}{z-1}}, z=1$$

7.7 Να δειχθεί ότι

$$(i) z^2 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{4n}}, \quad 0 < |z| < \infty$$

$$(ii) \frac{e^z}{(z+1)^2} = \frac{1}{e} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(n+2)!} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} \right], \quad 0 < |z+1| < \infty$$

7.8 Να βρεθούν δύο αναπτύγματα σειράς Laurent σε δυνάμεις του z της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

και να προσδιοριστούν οι περιοχές στις οποίες αντιστοιχούν.

7.9 Να αναπτυχθεί η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

(i) σε σειρά Maclaurin

(ii) σε σειρά Laurent σε δυνάμεις του z .

Στη κάθε περίπτωση να δοθεί η περιοχή σύγκλισης.

7.10 Να αναπτυχθεί η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$$

σε σειρά Laurent με δυνάμεις του $z-1$.

7.11 Έστω η πραγματική συνάρτηση

$$u(\theta) = \frac{1}{5-4\cos\theta}.$$

(i) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2},$$

να δειχθεί ότι

$$u(\theta) = f(z) = \frac{-z}{(z-2)(2z-1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{1-2z} \right).$$

(ii) Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(z)$ σε σειρά Laurent η οποία να ισχύει στο δακτύλιο $\frac{1}{2} < |z| < 2$.

(iii) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση

$$\cos(n\theta) = \frac{z^n + z^{-n}}{2},$$

να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $u(\theta)$.