Ασκήσεις 6

6.1 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 \mathrm{d}t \qquad \text{(ii)} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{e}^{2it}\mathrm{d}t$$

6.2 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{im\theta}\mathrm{e}^{-in\theta}\mathrm{d}\theta$, όπου m και n είναι ακέραιοι.

6.3 Να δειχθεί ότι

$$\left|\int_0^{\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right)^n \mathrm{d}\theta\right| \leq \pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

6.4 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C \frac{z+2}{z}\mathrm{d}z$, όπου C είναι

(i) το ημικύκλιο $z = 2\mathrm{e}^{i\theta}, \;\; 0 \leq \theta \leq \pi$

(ii) το ημικύκλιο $z = 2\mathrm{e}^{i\theta}, \;\; \pi \leq \theta \leq 2\pi$

(iii) το κύκλος $z = 2\mathrm{e}^{i\theta}, \;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi$

6.5 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\displaystyle\int_C \mathrm{Im}z\mathrm{d}z$, όπου C είναι τα τρία ευθύγραμμα τμήματα: από $-i$ στο $-1-i$, από $-1-i$ στο -1 και από το -1 στο i.

(ii) $\displaystyle\int_C |z|\bar{z}\mathrm{d}z$, όπου C είναι το ευθύγραμμο τμήμα από -1 στο 1 και το πάνω ημικύκλιο με κέντρο την αρχή και ακτίνα ίση με 1.

(iii) $\displaystyle\int_C \bar{z}^2\mathrm{d}z$, όπου C είναι ο κύκλος $|z-1| = 1$.

6.6 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\displaystyle\int_C \cosh 4z\mathrm{d}z$, όπου C είναι τροχιά από $-\frac{\pi i}{8}$ στο $\frac{\pi i}{8}$.

(ii) $\displaystyle\int_C \sec^2 z\mathrm{d}z$, όπου C είναι τροχιά από $-\frac{\pi}{4}$ στο $\frac{\pi i}{4}$.

(iii) $\displaystyle\int_C z\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z$, όπου C είναι η τροχιά από i στο 1 κατά μήκος των αξόνων.

6.7 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C (z-z_0)^{n-1}\mathrm{d}z$, όπου C είναι ο κύκλος $|z-z_0| = R$ και n είναι ακέραιος.

6.8 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_C \left[z^3 + \bar{z}\left(1 + \frac{1}{|z|^2}\right)\right]\mathrm{d}z$, όπου C είναι ο κύκλος $|z| = R$.

6.9 Να δειχθεί ότι

$$\text{(i)} \quad \left|\int_{C_1} \frac{\sin z}{z^2}\mathrm{d}z\right| \leq 2\pi\mathrm{e} \qquad \text{(ii)} \quad \left|\int_{C_R} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\mathrm{d}z\right| \leq 2\pi\left(\frac{\pi + \ln R}{R}\right)$$

όπου C_1 είναι ο κύκλος $|z| = 1$ και C_R είναι ο κύκλος $|z| = R\ (> 1)$.

6.10 Αφού βρεθεί η κατάλληλη αντιπαράγωγος, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \quad \int_{\mathrm{i}}^{\frac{\mathrm{i}}{2}} \mathrm{e}^{\pi z}\mathrm{d}z, \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^{\pi+2\mathrm{i}} \cos\left(\frac{z}{2}\right)\mathrm{d}z$$

$$\text{(iii)} \quad \int_1^3 (z-3)^3\mathrm{d}z \qquad \text{(iv)} \quad \int_{\frac{\pi i}{2}}^{0} \left(z\mathrm{e}^{z^2} - z\right)\mathrm{d}z$$

6.11 Έστω $\int_C f(z)\mathrm{d}z$, όπου C είναι ο κύκλος $|z| = 1$. Να εξεταστεί αν ισχύει το θεώρημα των Cauchy-Goursat για τις πιο κάτω συναρτήσεις:

(i) $f(z) = \operatorname{Re} z$ **(ii)** $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}$ **(iii)** $f(z) = \tan z^2$
(iv) $f(z) = \frac{1}{z^4-4}$ **(v)** $f(z) = \frac{1}{4|z|^4}$ **(vi)** $f(z) = z^2 \cos z$

6.12 Χρησιμοποιώντας την αρχή της παραμόρφωσης των δρόμων, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \quad \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z-1-\mathrm{i}} \qquad \text{(ii)} \quad \int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-1-\mathrm{i})^5} \qquad \text{(iii)} \quad \int_C \frac{\mathrm{d}z}{2z-1-\mathrm{i}}$$

όπου C είναι το τετράγωνο με κορυφές $z = 0, 3\mathrm{i}, 3+3\mathrm{i}, 3$.

6.13 Να δειχθεί ότι

$$\int_C \frac{\operatorname{Log} z}{(z+1)(z-3)}\mathrm{d}z = \int_C \frac{\operatorname{Log} z}{4(z-3)}\mathrm{d}z,$$

όπου C είναι ο κύκλος $|z-3| = 2$.

6.14 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\displaystyle\int_C \frac{z+2}{z-2}\mathrm{d}z \qquad C : |z-1| = 2$

(ii) $\displaystyle\int_C \frac{\sinh \pi z}{z^2-3z}\mathrm{d}z \qquad C : |z| = 1$

(iii) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1} \qquad C : |z+1| = 1$

(iv) $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{2z}\mathrm{d}z \qquad C : |z| = \frac{1}{2}$

(v) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{e}^{-3\pi z}}{2z+\mathrm{i}}\mathrm{d}z \qquad C$ είναι το τετράγωνο με κορυφές $\pm 1,\ \pm\mathrm{i}$.

(vi) $\displaystyle\int_C (|z|^2 + \mathrm{e}^z)\mathrm{d}z \qquad C : |z| = 1$

6.15 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\displaystyle\int_C \frac{z^2+z+1}{z-3}\mathrm{d}z \qquad C : |z| = 2$

(ii) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{e}^z}{z-1}\mathrm{d}z \qquad C : |z| = 2$

(iii) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{e}^z}{\pi i - 2z}\mathrm{d}z \qquad C : |z| = 2$

(iv) $\displaystyle\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 \mathrm{d}z \qquad C : |z| = 1$

(v) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{e}^z}{z-2}\mathrm{d}z \qquad C : |z-1| = 2$

(vi) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z-2)(z-5)^3}\mathrm{d}z \qquad C : |z-1| = 2$

6.16 Να δειχθεί ότι

$$\int_C \frac{\mathrm{e}^{az}}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i,$$

όπου a είναι πραγματική σταθερά και C είναι ο μοναδιαίος κύκλος $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)\mathrm{d}\theta.$$

6.17 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-2)(z-\frac{1}{2})},$$

όπου C είναι ο κύκλος $|z| = 1$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{5-4\cos t}.$$