Ασκήσεις 5

5.1 Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις των Cauchy-Riemann να δειχθεί ότι η συνάρτηση $\mathrm{e}^{\bar{z}}$ δεν είναι αναλυτική πουθενά.

5.2 Να δειχθεί ότι $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{z}}$ αν και μόνο αν $z = n\pi$, όπου n είναι ακέραιος.

5.3 (i) Αν e^{z} είναι πραγματικός, τότε να δειχθεί ότι $\mathrm{Im}\, z = n\pi$, όπου n είναι ακέραιος.
(ii) Αν e^{z} είναι καθαρά φανταστικός, να βρεθεί ο περιορισμός για τον z.

5.4 Να εκφραστεί ο $\mathrm{Re}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ συναρτήσει των x και y.

5.5 Να υπολογιστούν: (i) $\mathrm{Log}\,(-\mathrm{e}\mathrm{i})$ (ii) $\mathrm{Log}\,(1-\mathrm{i})$

5.6 Να υπολογιστούν: (i) $\log \mathrm{e}$ (ii) $\log \mathrm{i}$ (iii) $\log(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})$ (iv) $\log(-1)$

5.7 Να εκφραστεί ο $\mathrm{Re}\,[\log(z-1)]$ συναρτήσει των x και y.

5.8 Αν $\mathrm{Im}\, z > 0$, να δειχθεί ότι $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| < 1$.

5.9 Να βρεθούν όλες οι λύσεις των εξισώσεων:
(i) $\mathrm{e}^{z} = -4$ (ii) $\cos z = 2$ (iii) $\cosh z = -2$ (iv) $\log z = \frac{\mathrm{i}\pi}{2}$

5.10 Να δειχθεί ότι

$$\tan\left(\frac{\pi+2\mathrm{i}}{4}\right) = \frac{1+\mathrm{i}\sinh 1}{\cosh 1}.$$

5.11 Αν x και y είναι πραγματικοί, τότε να δειχθεί ότι

$$\lim_{y\to\infty} \tan(x+\mathrm{i}y) = \mathrm{i}.$$

5.12 Να βρεθούν οι τιμές των πιο κάτω
(i) $\cos(1+\mathrm{i})$ (ii) $\cosh(-2+3\mathrm{i})$ (iii) $\cosh(4-6\mathrm{i}\pi)$

5.13 Να δειχθεί ότι

$$\mathrm{Re}(\tan z) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sinh^2 y}, \quad \mathrm{Im}(\tan z) = \frac{\sinh y \cosh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y}.$$

5.14 Να βρεθούν οι τιμές των πιο κάτω
(i) $\cosh^{-1} \mathrm{i}$ (ii) $\sinh^{-1}[\log(-1)]$ (iii) $\tanh^{-1} 2$

5.15 Να δειχθεί ότι

$$\mathrm{Re}(\sin^{-1} z) = \sin^{-1}\left[\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+y^2+2x+1} - \sqrt{x^2+y^2-2x+1})\right].$$

5.16 Να δειχθεί ότι

$$\left(\frac{\mathrm{i}a-1}{\mathrm{i}a+1}\right)^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{-2b\cot^{-1}a},$$

όπου a και b είναι πραγματικές σταθερές.

5.17 Να δειχθεί ότι

$$\tan^{-1} z = \frac{\mathrm{i}}{2}\log\frac{\mathrm{i}+z}{\mathrm{i}-z}.$$

5.18 Να δειχθεί ότι $(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{\frac{3}{2}} = \pm 2\sqrt{2}$.

5.19 (i) Να βρεθούν όλες οι ρίζες της εξίσωσης $\sin z = \cosh 4$.
(ii) Να βρεθούν όλες οι ρίζες της εξίσωσης $\sin z = 2$.

5.20 Να δειχθεί ότι
(i) $\overline{\cos(\mathrm{i}z)} = \cos(\mathrm{i}\bar{z}), \quad \forall z$
(ii) $\overline{\sin(\mathrm{i}z)} = \sin(\mathrm{i}\bar{z})$, αν και μόνο αν $z = n\pi\mathrm{i},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$