Ασκήσεις 4

4.1 Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z},\ z \neq 0$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, να δειχθεί ότι

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2}.$$

4.2 Έστω ότι $f(z_0) = g(z_0) = 0$ και έστω ότι $f'(z_0)$ και $g'(z_0)$ υπάρχουν με $g'(z_0) \neq 0$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

4.3 Να δειχθεί ότι η $f'(z)$ δεν υπάρχει για τις συναρτήσεις

(i) $f(z) = \bar{z}$ (ii) $f(z) = \mathrm{Re}z$ (iii) $f(z) = \mathrm{Im}z$

4.4 Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις $f(z) = x + \mathrm{i}xy^2$ και $g(z) = \mathrm{e}^{x+2\mathrm{i}y}$ δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμες.

4.5 Έστω ότι η $f(z)$ είναι αναλυτική στο χωρίο D. Αν ισχύει $\mathrm{Re}f(z) = [\mathrm{Im}f(z)]^2$ στο D, τότε να δειχθεί ότι η $f(z)$ είναι σταθερή στο D.

4.6 Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι αναλυτικές:

(i) $f(z) = z^4$ (ii) $f(z) = \mathrm{e}^{2x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$

(iii) $f(z) = \mathrm{e}^{-x}(\cos y - \mathrm{i}\sin y)$ (iv) $f(z) = \frac{\mathrm{i}}{z^8}$

4.7 Να βρεθεί η αναλυτική συνάρτηση $f(z)$ της οποίας το πραγματικό μέρος είναι

(i) $u(x, y) = y^3 - 3x^2y,\quad f(\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i}$

(ii) $u(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2},\quad f(1) = 0$

(iii) $u(x, y) = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$

4.8 Έστω ότι $u(x, y) = \alpha$ και $v(x, y) = \beta$, όπου u και v είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης, αντίστοιχα και α και β είναι σταθερές, παριστάνουν δύο οικογένειες καμπυλών. Να δειχθεί ότι αυτές οι οικογένειες είναι ορθογώνιες.

4.9 Να βρεθούν ορθογώνιες τροχιές για τις πιο κάτω οικογένειες καμπυλών:

(i) $x^3y - xy^3 = \alpha$

(ii) $2\mathrm{e}^{-x}\sin y + x^2 - y^2 = \alpha$

(iii) $(r^2 + 1)\cos\theta = \alpha r$

4.10 Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι αρμονικές. Στη περίπτωση που είναι, να βρεθεί η αντίστοιχη αναλυτική συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$.

(i) $v(x, y) = xy$ (ii) $u(x, y) = \ln|z|$ (iii) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$

(iv) $v(x, y) = (x^2 - y^2)^2$ (v) $u(x, y) = \mathrm{e}^{-x}\sin 2y$

4.11 Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c έτσι ώστε η συνάρτηση $u(x,y) = \sin x \cosh cy$ να είναι αρμονική. Στη συνέχεια να βρεθεί η αρμονική συζυγής της.

4.12 Αν u και v είναι αρμονικές συναρτήσεις στο D, να δειχθεί ότι η

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

είναι αναλυτική στο D.

4.13 Έστω ότι u και v είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συνάρτησης

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}.$$

Να δειχθεί ότι οι εξισώσεις των Cauchy-Riemann ικανοποιούνται στο σημείο $z = (0,0)$.

4.14 Να βρεθούν τα σημεία ανωμαλίας των πιο κάτω συναρτήσεων:
(i) $f(z) = \frac{2z+1}{z(z^2+1)}$ **(ii)** $f(z) = \frac{z^3+i}{z^2-3z+2}$ **(iii)** $f(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$

4.15 Να δειχθεί ότι η εξίσωση του Laplace σε πολικές συντεταγμένες γράφεται

$$r^2 u_{rr}(r,\theta) + r u_r(r,\theta) + u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0.$$

4.16 Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u(r,\theta) = \ln r$ $(r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi)$ είναι αρμονική. Στη συνέχεια να βρεθεί η αρμονική συζυγής της.