

## Ασκήσεις 3

**3.1** Να σχεδιασθούν τα πιο κάτω σύνολα :

$$(α) |z - 2 + i| \leq 1 \quad (β) |2z + 3| > 4 \quad (γ) \operatorname{Im} z > 1 \quad (δ) \operatorname{Im} z = 1$$

$$(ε) 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \quad (z \neq 0) \quad (στ) |z - 4| \geq |z|$$

Στη συνέχεια να εξεταστεί ποιά σύνολα

- (i) είναι χωρία,
- (ii) δεν είναι ούτε ανοικτά ούτε κλειστά,
- (iii) είναι φραγμένα.

**3.2** Να βρεθεί η εικόνα του χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες  $x = 0$ ,  $x = 1$  και τον άξονα των  $x$  κάτω από την επίδραση της απεικόνισης  $w = z^2$ .

**3.3** Έστω η περιοχή  $r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ . Να βρεθεί η εικόνα της περιοχής μέσω της απεικόνισης: (i)  $w = z^2$  (ii)  $w = z^3$  (iii)  $w = z^4$

**3.4** Αν  $f(z) = \frac{1}{z} = u + iv$ , να βρεθούν καμπύλες των οποίων οι εικόνες είναι (i)  $u(x, y) = a$  (ii)  $v(x, y) = b$ , όπου  $a$  και  $b$  είναι μη-μηδενικές σταθερές.

**3.5** Χρησιμοποιώντας τον ορισμό, να δειχθεί ότι

$$\lim_{z \rightarrow 3} \frac{z^2 - 9}{z - 3} = 6.$$

**3.6** Χρησιμοποιώντας τον ορισμό, να δειχθεί ότι

$$(i) \lim_{z \rightarrow z_0} (az + b) = az_0 + b, \text{ όπου } a, b \text{ είναι μιγαδικές σταθερές.}$$

$$(ii) \lim_{z \rightarrow z_0} (z^2 + c) = z_0^2 + c, \text{ όπου } c \text{ είναι μιγαδική σταθερά.}$$

$$(iii) \lim_{z \rightarrow 1-i} [x + i(2x + y)] = 1 + i, \quad z = x + iy$$

**3.7** Να δειχθεί ότι το όριο  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{\bar{z}^2}$  δεν υπάρχει.

**3.8** Να υπολογιστούν τα όρια :

$$(i) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{5z^3}{(z+1)^3} \quad (ii) \lim_{z \rightarrow -2} \frac{2}{(z+2)^2} \quad (iii) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3 - 5}{z + 1}$$

**3.9** Να εξεταστούν αν οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο  $z = 0$ :

$$(i) f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases} \quad (ii) f(z) = \begin{cases} \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

$$(iii) f(z) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^3+y^3}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

**3.10** Έστω η συνάρτηση  $f(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{z - 1}$ ,  $z \neq 1$ . Να βρεθεί η τιμή της  $f(1)$  έτσι ώστε η  $f$  να είναι συνεχής στο σημείο  $z = 1$ .