

Ασκήσεις 10

10.1 Να βρεθεί η εικόνα της άπειρης λωρίδας $0 < x < 1$ μέσω του μετασχηματισμού $w = iz$.

10.2 Να βρεθεί η εικόνα του ημι-επιπέδου $x > 0$ μέσω του μετασχηματισμού $w = iz + i$.

10.3 Να βρεθεί η εικόνα της άπειρης λωρίδας $x > 0$, $0 < y < 2$ μέσω του μετασχηματισμού $w = iz + 1$.

10.4 Να βρεθεί η εικόνα της άπειρης λωρίδας $0 < y < \frac{1}{2c}$ μέσω του μετασχηματισμού $w = \frac{1}{z}$.

10.5 Να βρεθεί η εικόνα της άπειρης λωρίδας $x > 0$, $0 < y < 1$ μέσω του μετασχηματισμού $w = \frac{i}{z}$.

10.6 Έστω η απεικόνιση $T(z) = \frac{i}{z}$. Να βρεθεί η εικόνα

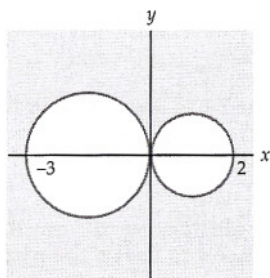
- (i) του δίσκου $|z| \leq 1$
- (ii) του δίσκου $|z - i| \leq 1$
- (iii) του ημι-επιπέδου $x \geq 0$
- (iv) του ημι-επιπέδου $y \leq 1$

10.7 Έστω η απεικόνιση $T(z) = \frac{z + i}{z - i}$. Να βρεθεί η εικόνα

- (i) του δίσκου $|z| \leq 1$
- (ii) του δίσκου $|z - i| \leq 1$
- (iii) του ημι-επιπέδου $x \geq 0$
- (iv) του ημι-επιπέδου $y \leq 1$

10.8 Έστω ο μετασχηματισμός $T(z) = \frac{z}{z - 2}$. Να βρεθεί η εικόνα της περιοχής $x^2 + y^2 \geq 1$, $y \geq 0$.

10.9 Έστω ο μετασχηματισμός $T(z) = \frac{z + 1}{z - 2}$. Να βρεθεί η εικόνα της περιοχής που δίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Σχήμα 1:

10.10 Να κατασκευαστεί ο διγραμμικός μετασχηματισμός ο οποίος απεικονίζει τα σημεία z_1 , z_2 και z_3 στα σημεία w_1 , w_2 και w_3 , αντίστοιχα.

(i) $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 2$ και $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$

(ii) $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = \infty$ και $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = 2$

(iii) $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$ και $w_1 = -1$, $w_2 = 0$, $w_3 = 3$

10.11 Ναδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός $w = \sin z$ είναι μια ένα προς ένα απεικόνιση της ορθογώνιας περιοχής $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq b$ πάνω σε μια ημι-ελλειπτική περιοχή στο άνω επίπεδο του w .