# Ασκήσεις 1

**1.1** Να γίνουν οι πράξεις:

(i) $(4+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$ (ii) $\dfrac{(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})^2}$

(iii) $(2\mathrm{i}-1)^2\left(\dfrac{4}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)$ (iv) $3\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2-2\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^3$

**1.2** Αν $z_1=1-\mathrm{i},\ z_2=-2+4\mathrm{i},\ z_3=\sqrt{3}-2\mathrm{i}$, να υπολογιστούν:
(i) $\overline{(z_2+z_3)(z_1-z_3)}$ (ii) $|z_1^2+\overline{z}_2^2|^2+|\overline{z}_3^2-z_2^2|^2$

(iii) $\mathrm{Re}\{2z_1^3+3z_2^2-5z_3^2\}$ (iv) $\mathrm{Im}\left\{\dfrac{z_1z_2}{z_3}\right\}$

**1.3** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί $x$ και $y$ τέτοιοι ώστε

$$2x-3\mathrm{i}y+4\mathrm{i}x-2y-5-10\mathrm{i}=(x+y+2)-(y-x+3)\mathrm{i}.$$

**1.4** Να εκφραστούν σε πολική μορφή: (i) $2+\mathrm{i}$ (ii) $-3-4\mathrm{i}$ (iii) $1-2\mathrm{i}$

**1.5** Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$\frac{(\cos\frac{1}{7}\pi-\mathrm{i}\sin\frac{1}{7}\pi)^3}{(\cos\frac{1}{7}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{1}{7}\pi)^4}.$$

**1.6** Να βρεθεί το μέτρο και το όρισμα του

$$\frac{[\sqrt{3}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^4}{\cos2\theta-\mathrm{i}\sin2\theta}.$$

**1.7** Αν $z=\frac{1}{2}(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})$, να εκφραστούν οι μιγαδικοί αριθμοί $z^4$ και $z^5$ στη μορφή $a+\mathrm{i}b$.

**1.8** Να βρεθούν οι τετραγωνικές ρίζες των (i) $2\mathrm{i}$ (ii) $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

**1.9** Να υπολογιστούν: (i) $(-16)^{\frac{1}{4}}$ (ii) $(-8-\mathrm{i}8\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$ .

**1.10** Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ και $w=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, όπου $0\le r<R$, να δειχθεί ότι

$$\mathrm{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right)=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}.$$

**1.11** Να δειχθεί ότι ο αριθμός $(\sqrt{3}+i)^n+(\sqrt{3}-i)^n$ είναι πραγματικός. Να βρεθεί η τιμή του όταν $n=12$.

**1.12** Αφού βρεθεί η έβδομη ρίζα του μιγαδικού αριθμού $z=-1$, να δειχθεί ότι

$$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

**1.13** (i) Αν $|z|=2$, τότε να δειχθεί ότι $|z+6+8i|\le 12$.
(ii) Αν $|z|=1$, τότε να δειχθεί ότι $2\le|z^2-3|\le 4$.

**1.14** Αν $|z|\le 1$, να βρεθεί ένα άνω φράγμα της $|3z^2+2z+1|$.