

Απαντήσεις

Κεφάλαιο 1

- 1.1** (i) $21 + i$ (ii) $-\frac{15}{2} + 5i$ (iii) $-\frac{11}{2} - \frac{23}{2}i$ (iv) $-3 - 2i$
1.2 (i) $-7 + 3\sqrt{3} + \sqrt{3}i$ (ii) $765 + 128\sqrt{3}$ (iii) -35 (iv) $\frac{6\sqrt{3}+4}{7}$
1.3 $x = 1, y = -2$
1.4 (i) $\sqrt{5}e^{i \tan^{-1}(1/2)}$ (ii) $5e^{i[\pi + \tan^{-1}(4/3)]}$ (iii) $\sqrt{5}e^{-i \tan^{-1} 2}$
1.5 -1
1.6 $9, 6\theta$
1.7 $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$
1.8 (i) $\pm(1 + i)$ (ii) $\pm \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}$
1.9 (i) $\pm\sqrt{2}(1 + i), \pm\sqrt{2}(1 - i)$ (ii) $\pm(\sqrt{3} - i), \pm(1 + i\sqrt{3})$
1.11 2^{13}
1.14 6

Κεφάλαιο 2

- 2.3** $1, 1, 2, -1 \pm i$
2.4 π
2.5 $\frac{4-2 \cos \theta}{5-4 \cos \theta}$
2.6 $y + x = 0$
2.7 $\frac{1}{60}$
2.8 $\frac{e^{ac}(a \cos bc + b \sin bc) - a}{a^2 + b^2}, \frac{e^{ac}(a \sin bc + b \cos bc) + b}{a^2 + b^2}$
2.9 (i) $\frac{1}{2} + \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\phi]}{2 \sin \frac{\phi}{2}}$ (ii) $\frac{1}{2} \cot \frac{\phi}{2} - \frac{\cos[(n+\frac{1}{2})\phi]}{2 \sin \frac{\phi}{2}}$

Κεφάλαιο 3

- 3.1** (i) (β), (γ) (ii) (ε) (iii) (α)
3.4 (i) $(x - \frac{1}{2a})^2 + y^2 = \frac{1}{4a^2}$ (ii) $x^2 + (y + \frac{1}{2b})^2 = \frac{1}{4b^2}$
3.8 (i) 5 (ii) ∞ (iii) ∞
3.9 (i) 'Όχι (ii) Ναι (iii) 'Όχι
3.10 -1

Κεφάλαιο 4

- 4.6** (i) Ναι (ii) 'Όχι (iii) 'Όχι (iv) Ναι για $z \neq 0$
4.7 (i) $i(z^3 + 1)$ (ii) $i(\frac{1}{z} - 1)$ (iii) $(1 - i)z^3 + ic$
4.9 (i) $\frac{1}{4}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) = \beta$ (ii) $2e^{-x} \cos y + 2xy = \beta$ (iii) $(r^2 - 1) \sin \theta = \beta r$
4.10 (i) $\frac{1}{2}z^2$ (ii) $\ln |z| + i \operatorname{Arg} z$ (iii) z^3 (iv) 'Όχι (v) 'Όχι
4.11 $c = 1, v(x, y) = \cos x \sinh y$
4.14 (i) $z = 0, \pm i$ (ii) $z = 1, 2$ (iii) $z = -2, -1 \pm i$
4.16 $v(r, \theta) = \theta$

Κεφάλαιο 5

5.3 (ii) $\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{2} + n\pi$

5.4 $e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

5.5 (i) $1 - i\frac{\pi}{2}$ **(ii)** $\frac{1}{2} \ln 2 - i\frac{\pi}{4}$

5.6 (i) $1 + 2n\pi i$ **(ii)** $(2n + \frac{1}{2})\pi i$ **(iii)** $\ln 2 + 2(n + \frac{1}{3})\pi i$ **(iv)** $i\pi$

5.7 $\frac{1}{2} \ln[(x-1)^2 + y^2]$

5.9 (i) $\ln 4 + i(2n+1)\pi$ **(ii)** $2n\pi \pm i \cosh^{-1}(2)$ **(iii)** $\ln(2 + \sqrt{3}) + i(2n+1)\pi$, $\ln(2 - \sqrt{3}) + i(2n+1)\pi$ **(iv)** i

5.12 (i) $\cos 1 \cosh 1 - i \sin 1 \sinh 1$

(ii) $-3.7245 - i0.51182$ **(iii)** $\cosh 4$

5.14 (i) $\ln|1 \pm \sqrt{2}| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

(ii) $\ln(m \pm \sqrt{m^2 - 1} + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right))$, $m = (2k+1)\pi$, $k, n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$

(iii) $\frac{1}{2}[\ln 3 + i(1 + 2k)\pi]$

5.19 (i) $\frac{1}{2}(1 + 4k)\pi \pm 4i$ **(ii)** $\frac{1}{2}(1 + 4k)\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3})$

Κεφάλαιο 6

6.1 (i) $-\frac{1}{2} - i \ln 4$ **(ii)** $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$

6.2 0 αν $m \neq n$, 2π αν $m = n$.

6.4 (i) $-4 + 2\pi i$ **(ii)** $4 + 2\pi i$ **(iii)** $4\pi i$

6.5 (i) $\frac{3}{2}$ **(ii)** πi **(iii)** $4\pi i$

6.6 (i) $\frac{i}{2}$ **(ii)** $-1 + i \tanh \frac{\pi}{4}$ **(iii)** $2 \sinh \frac{1}{2}$

6.7 $2\pi i$ αν $n = 0$ και 0 αν $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

6.8 $2\pi i(R^2 + 1)$

6.10 (i) $\frac{1+i}{\pi}$ **(ii)** $e + e^{-1}$ **(iii)** 0 **(iv)** $\frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{4}}\right) - \frac{\pi^2}{8}$

6.11 (i) πi , Όχι **(ii)** 0, Ναι **(iii)** 0, Ναι **(iv)** 0, Ναι **(v)** 0, Όχι **(vi)** 0, Ναι

6.12 (i) $2\pi i$ **(ii)** 0 **(iii)** πi

6.14 (i) $8\pi i$ **(ii)** 0 **(iii)** $-\pi i$ **(iv)** πi **(v)** π **(vi)** 0

6.15 (i) 0 **(ii)** $2\pi e i$ **(iii)** π **(iv)** 0 **(v)** $2\pi i e^2$ **(vi)** $-\frac{2}{27}\pi i e^2$

6.16 π

6.17 $-\frac{4}{3}\pi i, \frac{2}{3}\pi$

Κεφάλαιο 7

7.1 (i) φραγμένη, αποκλίνει **(ii)** φραγμένη, συγκλίνει **(iii)** μη-φραγμένη **(iv)** φραγμένη, αποκλίνει

7.2 (i) Συγκλίνει **(ii)** Αποκλίνει **(iii)** Αποκλίνει

7.3 (i) $e^{-2i}[1 + (z+2i) + \frac{1}{2}(z+2i)^2 + \frac{1}{6}(z+2i)^3 + \frac{1}{24}(z+2i)^4 + \dots]$, $R = \infty$

(ii) $1 - \frac{1}{2}(z - \frac{1}{2}\pi)^2 + \frac{1}{24}(z - \frac{1}{2}\pi)^4 - \frac{1}{720}(z - \frac{1}{2}\pi)^6 + \dots$, $R = \infty$

(iii) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i(z-i) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i)(z-i)^2 - \frac{1}{4}(z-i)^3 + \dots$, $R = \sqrt{2}$

(iv) $1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{48}z^6 + \frac{1}{384}z^8 - \dots$, $R = \infty$

7.4 $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{2!5} - \frac{z^7}{3!7} + \dots \right)$, $R = \infty$

$$\mathbf{7.5} \text{ (i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(-1 + \frac{(-1)^n}{2^n} \right) z^n, \quad |z| < 1$$

$$\text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2i(i+1)^n} [z - (1+i)]^n, \quad |z - (1+i)| < \sqrt{2}$$

$$\text{(iii)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}(n+1) - \frac{1}{36}4^{-n} \right) (z-2)^n, \quad |z-2| < 1$$

$$\mathbf{7.6} \text{ (i)} e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-1}}{n!}, \quad R = \infty$$

$$\text{(ii)} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2} \right)^{n+1} (z-i)^{n-1}, \quad R = 2$$

$$\text{(iii)} - \sum_{n=0}^{\infty} (z+i)^{n-1}, \quad R = 1$$

$$\text{(iv)} -\frac{3}{z-1} + 2 + (z-1)$$

$$\text{(v)} (z-1) + \sum_{n=-\infty}^0 \left(\frac{1}{(-n+1)!} + \frac{1}{(-n)!} \right) (z-1)^n, \quad |z-1| > 0$$

$$\mathbf{7.8} \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}, \quad 0 < |z| < 1 \text{ και } - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad 1 < |z| < \infty$$

$$\mathbf{7.9} \text{ (i)} -1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty}, \quad |z| < 1 \text{ (ii)} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad 1 < |z| < \infty$$

$$\mathbf{7.10} -3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+2}} - \frac{1}{2(z-1)}, \quad 0 < |z-1| < 2$$

$$\mathbf{7.11} \text{ (ii)} f(z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (z^n + z^{-n}) \text{ (iii)} u(\theta) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1} \cos(n\theta)$$

Κεφάλαιο 8

$$\mathbf{8.1} \text{ (i)} -\frac{1}{4}i \text{ στο } z = 2i, \frac{1}{4}i \text{ στο } z = -2i$$

$$\text{(ii)} \frac{1}{5!} \text{ στο } z = 0$$

$$\text{(iii)} 1 \text{ στα } z = \pm n\pi$$

$$\text{(iv)} -\frac{1}{4} \text{ στο } z = 1, \frac{1}{4} \text{ στο } z = -1$$

$$\text{(v)} -1 \text{ στα } z = \pm \frac{1}{2}(2n+1)\pi$$

$$\mathbf{8.2} \text{ (i)} \text{ διορθώσιμη ανωμαλία στο } z = 0$$

$$\text{(ii)} \text{ πόλος τάξης 2 στο } z = 0, \text{ απλός πόλος στα } z = 2n\pi i, \quad n \neq 0$$

$$\text{(iii)} \text{ πόλος τάξης 2 στο } z = 0, \text{ απλός πόλος στα } z = \pm \sqrt{2n\pi} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{(iv)} \text{ πόλος τάξης 2 στο } z = 0, \text{ απλός πόλος στα } z = \pm i$$

$$\mathbf{8.3} \text{ (i)} \frac{e^{-ma}}{2ia} \text{ (ii)} 1 \text{ (iii)} -\frac{1}{4} \text{ (iv)} -i \text{ (v)} 1 \text{ (vi)} 0$$

$$\mathbf{8.4} \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3}) \text{ στο } z = \frac{1}{4}(3 + i\sqrt{3}), \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3}) \text{ στο } z = \frac{1}{4}(3 - i\sqrt{3})$$

$$\mathbf{8.5} \text{ (i)} 2\pi i \text{ (ii)} -4i \text{ (iii)} -4\pi i \sinh \frac{1}{2}\pi \text{ (iv)} -4i \sinh \frac{1}{2} \text{ (v)} -4i \text{ (vi)} 5\pi i$$

$$\mathbf{8.7} \text{ (i)} -2\pi i \text{ (ii)} 0 \text{ (iii)} 2\pi i$$

8.8 (i) $n = 1, B = 3$ (ii) $n = 3, B = -\frac{3}{16}$ (iii) $n = 1, B = \pm\frac{1}{2\pi}$

8.9 (i) πi (ii) $6\pi i$

8.10 (i) $\frac{\pi i}{32}$ (ii) 0

Κεφάλαιο 9

9.1 (i) $\frac{2\pi}{3}$ (ii) $\sqrt{2}\pi$ (iii) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

9.2 (i) $\frac{\pi}{2}$ (ii) $\frac{\pi}{6}$ (iii) $\frac{\pi}{e}$ (iv) $\frac{\pi}{4e}$

9.3 (i) $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-\pi})$ (ii) $\frac{\pi}{2}(b - a)$

9.4 (i) $\frac{\pi}{16}$ (ii) $\frac{\pi}{e}$

9.4 $-2\pi i e^{a\pi i}$

9.7 (i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi^2 \operatorname{csch}^2 \pi + \frac{1}{4}\pi \operatorname{coth} \pi$ (ii) $\frac{7}{720}\pi^4$

Κεφάλαιο 10

10.1 $0 < v < 1$

10.2 $v > 1$

10.3 $-1 < u < 1, v < 0$

10.4 $u^2 + (v + c)^2 > c^2, v < 0$

10.5 $(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 > (\frac{1}{2})^2, u > 0, v > 0$

10.6 (i) $|w| \geq 1$ (ii) $u \geq \frac{1}{2}$ (iii) $v \geq 0$ (iv) $|w - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}$

10.7 (i) $u \leq 0$ (ii) $|w - 1| \geq 2$ (iii) $v \geq 0$ (iv) $u \leq 1$

10.8 Η εικόνα περιέχει τα σημεία w τέτοια ώστε $|w + \frac{1}{3}| \geq \frac{2}{3}$ και $v \leq 0$.

10.9 Η εικόνα περιέχει τα σημεία w τέτοια ώστε $|w + \frac{1}{20}| \geq \frac{9}{20}$ και $u \geq -\frac{1}{2}$.

10.10 (i) $T(z) = \frac{2z + 2}{-z + 2}$ (ii) $T(z) = \frac{2z}{z + i}$ (iii) $T(z) = \frac{3z - 3i}{(1 + 4i)z - (4 + i)}$