ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
(ΜΑΣ 005)

Ενδιάμεση εξέταση
Σάββατο 10 Μαρτίου, 2012

---

1. (α) Δίνονται τα σημεία $A(2,1,-3)$, $B(0,2,-1)$ και $P(4,3,0)$.
(ι) Να βρεθεί $\|\mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AP}\|$.
(ιι) Να βρεθεί η απόσταση του P από την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

(β) Αν τα διανύσματα $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$ είναι μη-μηδενικά και κάθετα μεταξύ τους, τότε κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$. Δηλαδή,

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

όπου $c_1,\ c_2,\ c_3$ είναι σταθερές. Να αποδειχθεί ότι

$$c_i = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|^2},\quad i=1,2,3.$$

Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k},\ \mathbf{v}_2 = -\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ και $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{i}+5\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα να γραφεί το διάνυσμα $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$.

2. (α) Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας στην οποία τέμνονται τα επίπεδα $2x+5z+3=0$ και $x-3y+z+2=0$.

(β) Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών

$$x=1+t,\ y=1-t,\ z=2t \quad \text{και} \quad x=2-s,\ y=s,\ z=2.$$

Στη συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει αυτές τις δύο ευθείες.

(γ) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών

$$x=1+t,\ y=1+6t,\ z=2t \quad \text{και} \quad x=1+2s,\ y=5+15s,\ z=-2+6s.$$

3. (α) Έστω $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Χρησιμοποιώντας ότι $\|\mathbf{r}\|^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$, να δειχθεί ότι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|\mathbf{r}\|] = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'.$$

(β) Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = t\cos t\mathbf{i} + t\sin t\mathbf{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}\mathbf{k}$ στο διάστημα $0 \le t \le \pi$.

(γ) Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^t\cos t\mathbf{i} + \mathrm{e}^t\sin t\mathbf{j} + \mathrm{e}^t\mathbf{k},\ t \ge 0$ συναρτήσει της παραμέτρου s (μήκος τόξου). Να χρησιμοποιηθεί ως σημείο αναφοράς το σημείο της καμπύλης όπου $t = 0$.

(δ) Να βρεθεί το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{T}$ και μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{N}$ για την καμπύλη $x = 3\cosh 2t,\ y = 3\sinh 2t,\ z = 6t$ στο σημείο $t = \ln 2$.

4. Να δοθούν οι ορισμοί των μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{T}(t)$ και $\mathbf{N}(t)$.

Αν $\mathbf{r}(t)$ είναι μια ομαλή διανυσματική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^3$, τότε να δειχθεί ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου t, για την οποία $\mathbf{T}'(t)$ και $\mathbf{r}''(t)$ υπάρχουν, η καμπυλότητα κ μπορεί να εκφραστεί ως

(i) $\kappa = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$, (ii) $\kappa = \dfrac{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

[Βοηθητικοί τύποι: $\kappa = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right\|$ $s = \int_{t_0}^{t}\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u}\right\|\mathrm{d}u$]

Να βρεθεί η καμπυλότητα της

$$\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 4\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

στο σημείο $t = \frac{\pi}{2}$.

5. (α) Να δοθεί ο ορισμός της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x,y)$ στο σημείο (x_0, y_0).

Να δειχθεί ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x_0, y_0), τότε η f είναι συνεχής στο (x_0, y_0).

(β) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης, να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c έτσι ώστε η $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ να ικανοποιεί την κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

(γ) Να δειχθεί ότι το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{5x^2+4y^2}$$

δεν υπάρχει.

6. (α) Να βρεθεί το σημείο πάνω στην επιφάνεια $z = 3x^2 - y^2$ στο οποίο το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο με το επίπεδο $6x + 4y - z = 5$.

(β) Να δειχθεί ότι οι επιφάνειες $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $z = \frac{1}{10}(x^2 + y^2) + \frac{5}{2}$ τέμνονται στο $(3, 4, 5)$ και ότι έχουν κοινό εφαπτόμενο επίπεδο σε αυτό το σημείο.

(γ) Να βρεθούν όλα τα σημεία τομής της ευθείας $x = -1 + t,\ y = 2 + t,\ z = 2t + 7$ και της επιφάνειας $z = x^2 + y^2$. Για κάθε σημείο τομής, να βρεθεί το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζει η κάθετος στο σημείο με τη δοσμένη ευθεία.

7. (α) Να βρεθούν τα σχετικά μέγιστα, σχετικά ελάχιστα και σαγματικά σημεία (αν υπάρχουν) της $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 9x^2 + 3y^2 - 12y$.

(β) Η παράγωγος της $f(x, y)$ στο σημείο $P(1, 2)$ στη κατεύθυνση $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ είναι ίση με $2\sqrt{2}$ και στην κατεύθυνση $\mathbf{v}_2 = -2\mathbf{j}$ είναι ίση με -3. Να βρεθεί η παράγωγος της f στην κατεύθυνση $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

8. Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2$ στο κλειστό και φραγμένο σύνολο R, όπου R είναι η ορθογώνια περιοχή $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.