ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
(ΜΑΣ 005)

Ενδιάμεση εξέταση
Σάββατο 24 Μαρτίου, 2007

---

1. (α) Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b έτσι ώστε το διάνυσμα $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + \mathbf{k}$ να είναι ορθογώνιο και με τα δύο διανύσματα $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ και $\mathbf{w} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

(β) Έστω $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ και $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Να βρεθεί: $\|\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}\|$.

(γ) Ένα σωματίδιο εκτοξεύεται από το έδαφος με ταχύτητα 768 m/sec που σχηματίζει γωνία 30^o με την οριζόντια. Να βρεθούν:

(i) οι παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς του σωματιδίου,

(ii) το μέγιστο ύψος που θα φθάσει το σωματίδιο,

(iii) η οριζόντια απόσταση που θα καλύψει το σωματίδιο,

(iv) η ταχύτητα (μέτρο και κατεύθυνση) του σωματιδίου όταν θα επιστρέψει στο έδαφος.

2. (α) Έστω ότι L_1 και L_2 είναι δύο ευθείες οι οποίες έχουν παραμετρικές εξισώσεις

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 - t, \quad z = 4 - 2t$$

και

$$x = 9 + t, \quad y = 5 + 3t, \quad z = -4 - t$$

Να βρεθούν:
(i) το σημείο τομής των δύο ευθειών,
(ii) η γωνία μεταξύ L_1 και L_2,
(iii) οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που είναι κάθετη στις ευθείες L_1 και L_2 και διέρχεται από το σημείο τομής τους.

(β) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο (1,7,-1) και περιέχει την ευθεία που είναι η τομή των επιπέδων $x - y + 8z = -4$ και $3x - y + 2z = 0$.

3. (α) Αν $\mathbf{r}(t)$ είναι διανυσματική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^3$ και το μέτρο $\|\mathbf{r}(t)\|$ είναι σταθερό για κάθε τιμή της παραμέτρου t, τότε να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{r}(t)$ και $\mathbf{r}'(t)$ είναι ορθογώνια $\forall t$.

(β) Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^t\mathbf{i} + \mathrm{e}^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{2}\, t\mathbf{k}$ στο διάστημα $0 \le t \le 1$.

(γ) Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = \sin(\mathrm{e}^t)\mathbf{i} + \cos(\mathrm{e}^t)\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathrm{e}^t\mathbf{k},\ t \ge 0$ συναρτήσει της παραμέτρου s (μήκος τόξου). Να χρησιμοποιηθεί ως σημείο αναφοράς το σημείο της καμπύλης όπου $t = 0$.

(δ) Να βρεθεί το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{T}$ και μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{N}$ για την καμπύλη $x = \cosh t,\ y = \sinh t,\ z = t$ στο σημείο $t = \ln 2$.

4. Να δοθούν οι ορισμοί των μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{T}(t)$ και $\mathbf{N}(t)$.
Αν $\mathbf{r}(t)$ είναι μια ομαλή διανυσματική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^3$, τότε να δειχθεί ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου t, για την οποία $\mathbf{T}'(t)$ και $\mathbf{r}''(t)$ υπάρχουν, η καμπυλότητα κ μπορεί να εκφραστεί ως
(i) $\kappa = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$, (ii) $\kappa = \dfrac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$
[Βοηθητικοί τύποι: $\kappa = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right\|$ $\quad s = \int_{t_0}^{t} \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u}\right\| \mathrm{d}u$]
Έστω η διανυσματική εξίσωση

$$\mathbf{r} = 2\cos t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j}, \quad 0 \le t < 2\pi$$

η οποία παριστάνει μια έλλειψη. Να βρεθεί η καμπυλότητα της έλλειψης στα άκρα των αξόνων.

5. (α) Να δοθεί ο ορισμός της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x, y)$ στο σημείο (x_0, y_0).
Να δειχθεί ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x_0, y_0), τότε η f είναι συνεχής στο (x_0, y_0).

(β) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης, να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c έτσι ώστε η $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ να ικανοποιεί την κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

(γ) Να δειχθεί ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

6. (α) Να βρεθούν τα σημεία πάνω στην επιφάνεια $x^2+4x+y^2+z^2-2z=11$ στα οποία το εφαπτόμενο επίπεδο είναι οριζόντιο.

(β) Έστω ότι

$$\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(a,b)=-1, \quad \mathrm{D}_{\mathbf{v}}f(a,b)=7,$$

όπου $\mathbf{u}=\frac{3}{5}\mathbf{i}-\frac{4}{5}\mathbf{j}, \;\; \mathbf{v}=\frac{3}{5}\mathbf{i}+\frac{4}{5}\mathbf{j}$. Να βρεθεί η $\nabla f(a,b)$.

(γ) Δίνεται ότι $\nabla f(a,b)=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ τέτοιο ώστε
(i) $\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(a,b)=0$
(ii) $\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(a,b)$ είναι μέγιστο.
(iii) $\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(a,b)$ είναι ελάχιστο.

7. (α) Να βρεθούν τα σχετικά μέγιστα, σχετικά ελάχιστα και σαγματικά σημεία (αν υπάρχουν) της $f(x,y)=4x^3+y^3-12x-3y$.

(β) Να βρεθεί το σημείο του επιπέδου $x+2y+z=1$ το οποίο είναι το πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

8. Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)=xy-2x-y+6$ στο κλειστό και φραγμένο σύνολο R, όπου R είναι η τριγωνική περιοχή με κορυφές (0,0), (0,8) και (4,0).