# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

# ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ**
**(ΜΑΣ 005)**

**Ενδιάμεση εξέταση**
Σάββατο 12 Μαρτίου, 2005

---

**1**. (α) Δίνονται τα σημεία Α(1,1,0), Β(-2,3,-4) και Ρ(-3,1,2).
(i) Να βρεθεί $\|\text{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AP}\|$
(ii) Να βρεθεί η απόσταση του $P$ από την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

(β) Αν τα διανύσματα $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$ είναι μη-μηδενικά και κάθετα μεταξύ τους, τότε κάθε διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$. Δηλαδή,

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

όπου $c_1,\ c_2,\ c_3$ είναι σταθερές. Να αποδειχθεί ότι

$$c_i = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k},\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ και $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα να γραφεί το διάνυσμα $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$.

**2**. (α) Εστω ότι $L_1$ και $L_2$ είναι δύο ευθείες οι οποίες έχουν παραμετρικές εξισώσεις

$$x = 1 + 2t, \ \ y = 2 - t, \ \ z = 4 - 2t$$

και

$$x = 9 + t, \ \ y = 5 + 3t, \ \ z = -4 - t$$

(i) Να βρεθεί το σημείο τομής των δύο ευθειών.
(ii) Να βρεθεί η γωνία μεταξύ $L_1$ και $L_2$.
(iii) Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που είναι κάθετη στις ευθείες $L_1$ και $L_2$ και διέρχεται απο το σημείο τομής τους.

(β) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο (-1,4,2) και περιέχει την ευθεία που είναι η τομή των επιπέδων $4x - y + z = 2$ και $2x + y - 2z = 3$.

**3**. (α) Αν $\mathbf{r}(t)$ είναι διανυσματική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^3$ και το μέτρο $\|\mathbf{r}(t)\|$ είναι σταθερό για κάθε τιμή της παραμέτρου $t$, τότε να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{r}(t)$ και $\mathbf{r}'(t)$ είναι ορθογώνια $\forall t$.

(β) Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\mathbf{k}$ στο διάστημα $-1 \leq t \leq 1$.

(γ) Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = \sin(\mathrm{e}^t)\mathbf{i} + \cos(\mathrm{e}^t)\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathrm{e}^t\mathbf{k},\ t \geq 0$ συναρτήσει της παραμέτρου $s$ (μήκος τόξου). Να χρησιμοποιηθεί ως σημείο αναφοράς το σημείο της καμπύλης όπου $t = 0$.

(δ) Να βρεθεί το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{T}$ και μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{N}$ για την καμπύλη $x = \mathrm{e}^t,\ y = \mathrm{e}^{-t},\ z = t$ στο σημείο $t = 0$.

**4**. Ένα σωματίδιο εκτοξεύεται από το έδαφος με ταχύτητα 98 m/sec που σχηματίζει γωνία $45^o$ με την οριζόντια. Να βρεθούν:

(i) οι παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς του σωματιδίου,

(ii) το μέγιστο ύψος που θα φθάσει το σωματίδιο,

(iii) η οριζόντια απόσταση που θα καλύψει το σωματίδιο,

(iv) η ταχύτητα (μέτρο και κατεύθυνση) του σωματιδίου όταν θα επιστρέψει στο έδαφος.

**5**. (α) Να δοθεί ο ορισμός της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x, y)$ στο σημείο $(x_0, y_0)$.
Να δειχθεί ότι αν η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $(x_0, y_0)$, τότε η $f$ είναι συνεχής στο $(x_0, y_0)$.

(β) Αν οι συναρτήσεις $f$ και $g$ έχουν μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης, να δειχθεί ότι η $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ ικανοποιεί την κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

(γ) Έστω ότι

$$\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(a, b) = 7, \quad \mathrm{D}_{\mathbf{v}}f(a, b) = 3,$$

όπου $\mathbf{u} = \frac{5}{13}\mathbf{i} - \frac{12}{13}\mathbf{j},\ \ \mathbf{v} = \frac{5}{13}\mathbf{i} + \frac{12}{13}\mathbf{j}$. Να βρεθεί η $\nabla f(a, b)$.

**6**. (α) Να βρεθεί το σημείο πάνω στην επιφάνεια $z = 8 - 3x^2 - 2y^2$ στο οποίο το εφαπτόμενο επίπεδο είναι κάθετο στην ευθεία γραμμή $x = 2 - 3t,\ y = 7 + 8t,\ z = 5 - t$.

(β) Να δειχθεί ότι οι επιφάνειες $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ και $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ τέμνονται στο $(2, 2, 2\sqrt{2})$ και ότι έχουν εφαπτόμενα επίπεδα τα οποία τέμνονται κάθετα σε αυτό το σημείο.

(γ) Αν $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$, τότε να δειχθεί ότι όλες οι κατευθυντικές παράγωγοι της $f(x, y)$ στο σημείο $(x_0, y_0)$ είναι μηδέν.

**7**. (α) Να βρεθούν τα σχετικά μέγιστα, σχετικά ελάχιστα και σαγματικά σημεία (αν υπάρχουν) της $f(x,y) = -2x^3 - 2y^3 + 6xy + 10$.

(β) Ένα πεντάγωνο κατασκευάζεται από ένα ορθογώνιο και ένα ισοσκελές τρίγωνο. Το ορθογώνιο έχει διαστάσεις $2x \times y$ και το ισοσκελές τρίγωνο έχει βάση $2x$ και γωνία βάσης $\theta$. Δίνεται ότι η περίμετρος του πενταγώνου είναι ίση με 20cm. Να βρεθούν οι τιμές των $x,\ y$ και $\theta$ τέτοιες ώστε το εμβαδόν του πενταγώνου να είναι ελάχιστο.

**8**. Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x\mathrm{e}^y - x^2 - \mathrm{e}^y$ στο κλειστό και φραγμένο σύνολο R, όπου R είναι η ορθογώνια περιοχή με κορυφές (0,0), (0,1), (2,1) και (2,0).