ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
(ΜΑΣ 005)

Ενδιάμεση εξέταση
Σάββατο 7 Απριλίου, 2012

---

1. (α) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Να δοθούν οι συνθήκες έτσι ώστε το σύνολο W να είναι υπόχωρος του V.

Έστω $M_{2\times 2}$ ο διανυσματικός χώρος των 2×2 πινάκων. Να δειχθεί ότι το σύνολο των 2×2 πινάκων που έχουν το ίχνος τους ίσο με μηδέν είναι υπόχωρος του $M_{2\times 2}$, ενώ το σύνολο των 2×2 πινάκων που έχουν το ίχνος τους ίσο με 2 δεν είναι υπόχωρος.

(β) Να δοθεί ο ορισμός του αντίστροφου πίνακα.

Αν $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμοι $n\times n$ πίνακες, να δειχθεί ότι ο αντίστροφος του $\mathbf{AB}$ είναι $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Αν $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$ είναι αντιστρέψιμοι $n\times n$ πίνακες οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση

$$(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{B}+\mathbf{C},$$

να εκφραστεί ο πίνακας $\mathbf{A}$ συναρτήσει των $\mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$.

(γ) Έστω ότι $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k$ είναι στοιχεία του διανυσματικού χώρου V. Να εξηγηθεί τι σημαίνει γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k$.

Να εξεταστεί αν τα διανύσματα $(1,2,4)$ και $(4,0,8)$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $\mathbf{u}_1=(1,1,1)$ και $\mathbf{u}_2=(1,-1,3)$.

2. (α) Να δοθούν οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ένα σύνολο έτσι ώστε να είναι βάση ενός διανυσματικού χώρου.

Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_3=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_4=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

είναι βάση του διανυσματικού χώρου $M_{2\times 2}$.

(β) Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς k για τις οποίες το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x+2y-3z &= 4\\ 3x-y+5z &= 2\\ 4x+y+(k^2-14)z &= k+2 \end{aligned}$$

(i) δεν έχει λύση, (ii) έχει μόνο μια λύση, (iii) έχει άπειρες λύσεις.

3. Να δειχθεί ότι ο πίνακας $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$ είναι ορθογώνιος.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{A}$.

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $\mathbf{A}$.

Να εξεταστεί αν το πιο κάτω σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{\sqrt{2}}z &= 3 \\ \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{\sqrt{2}}z &= -2 \\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}y &= \tfrac{5}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

4. Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 9 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 27 \end{array}.$$

Να υπολογιστεί η τιμή της ορίζουσας

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας τη λύση του πιο πάνω συστήματος και την τιμή της ορίζουσας Δ, να υπολογιστούν οι τιμές των οριζουσών:

$$\text{(i)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 3 & 2 & 2 \\ 9 & 5 & 3 & 1 \\ 27 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 12 & 9 & 27 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

5. (α) Χωρίς να αναπτυχθεί η ορίζουσα (δηλαδή, να χρησιμοποιηθούν μόνο ιδιότητες των οριζουσών), να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & b \\ b & b & 2 \end{vmatrix} = (a+b+2)(a-2)(b-2).$$

Χωρίς να αναπτυχθεί η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 6 & 12 & 20 \\ 9 & 8 & 20 \\ 9 & 16 & 10 \end{vmatrix}$$

να βρεθεί η τιμή της.

(β) Να υπολογιστεί η τιμή της ορίζουσας του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια να υπολογιστούν οι τιμές των οριζουσών:

$$\text{(i) } \det(\mathbf{A}^T) \quad \text{(ii) } \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) \quad \text{(iii) } \det(\mathbf{A}^{-1}) \quad \text{(iv) } \det(4\mathbf{A}) \quad \text{(v) } \det((2\mathbf{A})^{-1})$$

6. Δίνεται ότι $\dim(P_3) = 4$, όπου P_3 το σύνολο των πολυώνυμων τρίτου βαθμού. Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς k έτσι ώστε το πιο κάτω σύνολο

$$x^3+x^2+2x+3, \;\; 2x^3+4x^2+4x+6, \;\; 3x^3+2x^2+3x+9, \;\; x^3+3x^2+x+k$$

να είναι μια βάση του P_3.

Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k για την οποία το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+x_4 &= 0 \\ x_1+4x_2+2x_3+3x_4 &= 0 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4 &= 0 \\ 3x_1+6x_2+9x_3+kx_4 &= 0 \end{aligned}$$

έχει άπειρες λύσεις. Για αυτή τη τιμή της σταθεράς k να εκφραστεί η λύση συναρτήσει μιας παραμέτρου.

7. (α) Έστω οι πίνακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Να λυθεί η εξίσωση

$$\mathbf{AX} + 5\mathbf{X} = \mathbf{B}$$

ως προς το πίνακα $\mathbf{X}$.

(β) Να βρεθεί ο πίνακας $\mathbf{K}$ έτσι ώστε $\mathbf{AKB} = \mathbf{C}$, όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. (α) Έστω ο πίνακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Να δειχθεί ότι $\mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2 - 12\mathbf{A} + 27\mathbf{I} = \mathbf{0}$, όπου $\mathbf{I}$ και $\mathbf{0}$ είναι ο ταυτοτικός και μηδενικός πίνακας, αντίστοιχα.

Αν ο $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος, να δειχθεί ότι $27\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + 12\mathbf{I}$.

Στη συνέχεια να υπολογιστεί ο $\mathbf{A}^{-1}$.

Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο αντίστροφο πίνακα, να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 24 \\ x - y - 2z &= -8 \\ x + 5y - z &= 20 \end{aligned}.$$

(β) Έστω το σύνολο $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \ x_3 = 3x_1 - x_2, x_4 = x_2 - x_1\}$.

(i) Να δειχθεί ότι το W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.

(ii) Να βρεθεί μια βάση για το W.