# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

# ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ**
**(ΜΑΣ 005)**

**Ενδιάμεση εξέταση**
Σάββατο 28 Απριλίου, 2007

---

**1**. Να λυθεί το γραμμικό σύστημα (με τη μέθοδο των Gauss-Jordan)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & & + & x_4 & = & 9 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 21 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 25 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 31 \end{array}.$$

Να υπολογιστεί η τιμή της ορίζουσας

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας τη λύση του πιο πάνω συστήματος και την τιμή της ορίζουσας $\Delta$, να υπολογιστούν οι τιμές των οριζουσών:

$$\text{(i)} \begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 & 1 \\ 1 & 21 & 2 & 2 \\ 2 & 25 & 3 & 1 \\ 3 & 31 & 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 21 \\ 2 & 5 & 3 & 25 \\ 3 & 1 & 2 & 31 \end{vmatrix}$$

**2**. Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς $k$ για τις οποίες τα πιο κάτω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & k \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς $k$ για την οποία το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + kx_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

έχει μη-μηδενική λύση. Να βρεθεί η λύση για αυτή την τιμή της σταθεράς $k$.

**3**. (α) Να δειχθεί ότι ο πίνακας $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$ είναι ορθογώνιος.

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $\mathbf{A}$.

Να γραφτεί ο πίνακας $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$ ως γραμμικός συνδυασμός των

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(β) Με την προϋπόθεση ότι οι αντίστροφοι πίνακες που εμφανίζονται υπάρχουν, να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}.$$

**4**. (α) Χωρίς να αναπτυχθεί η ορίζουσα (δηλαδή, να χρησιμοποιηθούν μόνο ιδιότητες των οριζουσών), να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b).$$

Χωρίς να αναπτυχθεί η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 25 \\ 3 & 7 & 49 \end{vmatrix}$$

να βρεθεί η τιμή της.

(β) Να υπολογιστεί η τιμή της ορίζουσας του πίνακα

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 + x \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια να δειχθεί ότι αν $x = 1$, ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \neq -1.$$

**5**. (α) Έστω οι πίνακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & a & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών $a$ και $b$ τέτοιες ώστε ο πίνακας $\mathbf{B}$ να είναι ο αντίστροφος του πίνακα $\mathbf{A}$.

Να λυθεί η εξίσωση

$$\mathbf{CX} + 5\mathbf{X} = \mathbf{D}$$

ως προς το πίνακα $\mathbf{X}$.

(β) Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς $a$ για τις οποίες το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

(i) δεν έχει λύση,

(ii) έχει μόνο μια λύση,

(iii) έχει άπειρες λύσεις.

**6**. Ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{A}$ με την ιδιότητα $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ καλείται **αδύναμος πίνακας**.

(i) Να βρεθεί ένας $2 \times 2$ αδύναμος πίνακας (εκτός από τον ταυτοτικό και τον μηδενικό).

(ii) Να δειχθεί ότι ο πίνακας $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι αδύναμος.

(iii) Αν $\mathbf{A}$ είναι ένας αδύναμος πίνακας, να δειχθεί ότι ο πίνακας $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ είναι επίσης αδύναμος.

(iv) Να βρεθεί ένας $3 \times 3$ αδύναμος πίνακας.

(v) Έστω ότι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι δύο τετραγωνικοί πίνακες. Να δειχθεί ότι ο $\mathbf{A}$ είναι αδύναμος πίνακας με την προϋπόθεση ότι ισχύει $\mathbf{AB} = \mathbf{A}$ και $\mathbf{BA} = \mathbf{B}$.

(vi) Να βρεθεί η πιθανή τιμή της ορίζουσας ενός αδύναμου πίνακα.

**7**. (α) Έστω ότι $V$ είναι το σύνολο των ορισμένων ολοκληρωμάτων στο διάστημα $[a, b]$. Να δειχθεί ότι το σύνολο $V$ είναι ένας διανυσματικός χώρος.

[**Σημείωση**: Να δειχθεί μόνο ότι το σύνολο $V$ είναι κλειστό ως προς τη πρόσθεση, κλειστό ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό και να δοθεί το μηδενικό και αντίθετο διάνυσμα.]

(β) Έστω ότι $M_{22}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των $2 \times 2$ πινάκων. Να εξεταστούν αν τα πιο κάτω υποσύνολα του $M_{22}$ είναι διανυσματικοί υπόχωροι:

(i) $W_1$: $2 \times 2$ συμμετρικοί πίνακες

(ii) $W_2$: $2 \times 2$ αντι-συμμετρικοί πίνακες

(iii) $W_3$: $2 \times 2$ πίνακες με ίχνος ίσο με 0.

(iv) $W_4$: $2 \times 2$ πίνακες με ίχνος ίσο με 1.

**8**. Να δειχθεί ότι το πιο κάτω σύνολο διανυσμάτων είναι μια βάση του $\mathbb{R}^4$:

$$(3, 6, 3, -6), \quad (0, -1, -1, 0), \quad (0, -8, -12, -4), \quad (1, 0, -1, 2).$$

Να βρεθεί το διάνυσμα των συντεταγμένων του διανύσματος $(5, -11, -24, -10)$ ως προς την πιο πάνω βάση.