ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
(ΜΑΣ 005)

Ενδιάμεση εξέταση
Σάββατο 16 Απριλίου, 2005

---

1. Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & & + & x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & -4 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 11 \end{array}.$$

Να υπολογιστεί η τιμή της ορίζουσας

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας τη λύση του πιο πάνω συστήματος και την τιμή της ορίζουσας Δ, να υπολογιστούν οι τιμές των οριζουσών:

$$\text{(i)} \quad \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 11 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k για την οποία το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + kx_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

έχει μη-μηδενική λύση. Να βρεθεί η λύση για αυτή την τιμή της σταθεράς k.

Να εξεταστεί αν τα πιο κάτω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Να εξεταστεί αν τα πιο κάτω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα:

$$x^3+x^2+2x+3,\quad 2x^3+4x^2+4x+6,\quad 3x^3+2x^2+3x+8,\quad -x^3-3x^2-x-3.$$

3. (α) Να δειχθεί ότι ο πίνακας $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$ είναι ορθογώνιος.

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $\mathbf{A}$.

Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών $\lambda_1,\ \lambda_2$ και λ_3 τέτοιες ώστε

$$\lambda_1\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

(β) Με την προϋπόθεση ότι οι αντίστροφοι πίνακες που εμφανίζονται υπάρχουν, να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{I}+\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}.$$

4. (α) Χωρίς να αναπτυχθεί η ορίζουσα (δηλαδή, να χρησιμοποιηθούν μόνο ιδιότητες των οριζουσών), να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 2 & a & b \\ a & 2 & b \\ a & b & 2 \end{vmatrix}=(a+b+2)(a-2)(b-2).$$

Χωρίς να αναπτυχθεί η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 12 \\ 3 & 10 & 12 \\ 3 & 15 & 8 \end{vmatrix}$$

να βρεθεί η τιμή της.

(β) Να υπολογιστεί η τιμή της ορίζουσας του πίνακα

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια να υπολογιστούν οι τιμές των οριζουσών:

(i) $\det(\mathbf{A}^T)$ (ii) $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$ (iii) $\det(\mathbf{A}^{-1})$ (iv) $\det(3\mathbf{A})$

5. (α) Έστω οι πίνακες

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} a & -4 & 7 \\ -2 & 3 & -4 \\ b & -1 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b τέτοιες ώστε ο πίνακας $\mathbf{B}$ να είναι ο αντίστροφος του πίνακα $\mathbf{A}$.
Να λυθεί η εξίσωση

$$\mathbf{CX} + 2\mathbf{X} = \mathbf{D}$$

ως προς το πίνακα $\mathbf{X}$.

(β) Έστω οι πίνακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \text{ όπου } a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Να βρεθεί το γινόμενο $\mathbf{BA}$.
Να δειχθεί ότι
(i) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^T\mathbf{B} - \mathbf{I}$
(ii) $\mathbf{A}^3 = -\mathbf{A}$

6. (α) Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος για όλες τις τιμές του θ. Στη συνέχεια να βρεθεί ο αντίστροφος του $\mathbf{A}$.

(β) Αν $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$ είναι $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε να δειχθεί ότι

$$(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

7. (α) Έστω ότι V είναι το σύνολο των ορισμένων ολοκληρωμάτων στο διάστημα $[a, b]$. Να δειχθεί ότι το σύνολο V είναι ένας διανυσματικός χώρος.
[**Σημείωση**: Να δειχθεί μόνο ότι το σύνολο V είναι κλειστό ως προς τη πρόσθεση, κλειστό ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό και να δοθεί το μηδενικό και αντίθετο διάνυσμα.]

(β) Έστω ότι P_2 είναι ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων δευτέρου βαθμού ($P_2 = ax^2 + bx + c$). Να δειχθεί ότι το υποσύνολο W_1 του P_2 με την ιδιότητα $a + b + c = 0$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του P_2 ενώ το υποσύνολο W_2 με την ιδιότητα $a + b + c = 1$ δεν είναι υπόχωρος του P_2.

8. Να δειχθεί ότι το πιο κάτω σύνολο διανυσμάτων είναι μια βάση του M_{22} (σύνολο των 2×2 πινάκων)

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθεί το διάνυσμα των συντεταγμένων του διανύσματος

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -11 & -8 \end{bmatrix}$$

ως προς την πιο πάνω βάση.