ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
ΜΑΣ 005

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Παρασκευή 11 Μαΐου, 2012

Να λυθούν πέντε (5) θέματα.

---

1. (α) Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που περιέχει το σημείο $(0, 2, 1)$ και τέμνει κάθετα την ευθεία με παραμετρικές εξισώσεις $x = 2t,\ y = 1 - t,\ z = 2 + t$.

(β) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει το σημείο $(2, 0, 3)$ και την ευθεία με παραμετρικές εξισώσεις $x = -1 + t,\ y = t,\ z = -4 + 2t$.

(γ) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των επιπέδων $-2x + y + z = 0$ και $6x - 3y - 3z = 5$.

2. (α) Να δοθούν οι ορισμοί των μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{T}(t)$ και $\mathbf{N}(t)$.
Αν $\mathbf{r}(t)$ είναι μια ομαλή διανυσματική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^3$, τότε να δειχθεί ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου t, για την οποία $\mathbf{T}'(t)$ και $\mathbf{r}''(t)$ υπάρχουν, η καμπυλότητα κ μπορεί να εκφραστεί ως
(i) $\kappa = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$, (ii) $\kappa = \dfrac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$
[Βοηθητικοί τύποι: $\kappa = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right\|$ $s = \int_{t_0}^{t} \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u}\right\| \mathrm{d}u$]
Έστω η διανυσματική εξίσωση

$$\mathbf{r} = 2\cos t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j}, \quad 0 \le t < 2\pi$$

η οποία παριστάνει μια έλλειψη. Να βρεθεί η καμπυλότητα της έλλειψης στα άκρα των αξόνων.

(β) Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^t\mathbf{i} + \mathrm{e}^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{2}\ t\mathbf{k}$ στο διάστημα $0 \le t \le 1$.

3. (α) Να δοθεί ο ορισμός της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x, y)$ στο σημείο (x_0, y_0).
Να δειχθεί ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x_0, y_0), τότε η f είναι συνεχής στο (x_0, y_0).

(β) Έστω $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4z^2}{(x+y)^4}.$$

(γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις του εφαπτόμενου επιπέδου και της κάθετης ευθείας γραμμής της επιφάνειας $z = \mathrm{e}^{3y}\sin 3x$ στο σημείο $P(\frac{\pi}{6}, 0, 1)$.

(δ) Έστω $f(x, y) = \frac{y}{x+y}$. Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ για το οποίο ισχύει $D_{\mathbf{u}}f(2, 3) = 0$.

4. α) Να βρεθούν τα σχετικά ακρότατα και σαγματικά σημεία (αν υπάρχουν) της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 - 12x^2 - 2y^2 + 21x.$$

(β) Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ στο κλειστό και φραγμένο σύνολο R, όπου R είναι η κυκλική περιοχή $x^2 + y^2 \leq 4$. Να προσδιοριστούν τα σημεία στα οποία συμβαίνουν τα απόλυτα ακρότατα.

5. (α) Να λυθεί το γραμμικό σύστημα (με τη μέθοδο των Gauss-Jordan)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 18 \end{array}.$$

Να υπολογιστεί η τιμή της ορίζουσας

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας τη λύση του πιο πάνω συστήματος και την τιμή της ορίζουσας Δ, να υπολογιστούν οι τιμές των οριζουσών:

$$\text{(i)} \quad \begin{vmatrix} -3 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 3 & -1 \\ 18 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & -10 \\ 3 & 1 & 2 & -36 \end{vmatrix}$$

(β) Χωρίς να αναπτυχθεί η ορίζουσα (δηλαδή, να χρησιμοποιηθούν μόνο ιδιότητες των οριζουσών), να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1+x+x^2 & x & x^2 \\ 1+y+y^2 & y & y^2 \\ 1+z+z^2 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$$

6. (α) Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο αντίστροφο πίνακα, να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x+3y-2z &= 7 \\ 2x+5y-3z &= 13 \\ -3x+2y-4z &= -9 \end{aligned}.$$

Να δειχθεί ότι τα διανύσματα

$$(1,3,-2),\ (2,5,-3),\ (-3,2,-4)$$

αποτελούν μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

(β) Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & a \\ x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & b \\ 3x_1 & + & 15x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & c \end{array},$$

όπου $a,\ b$ και c είναι μη-μηδενικές πραγματικές σταθερές. Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τις σταθερές έτσι ώστε το σύστημα να έχει λύση.

7. (α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(β) Να δειχθεί ότι $(1,1,2)$ και $(1,-1,0)$ είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

και να βρεθούν οι αντίστοιχες ιδιοτιμές.

(γ) Να εξεταστεί αν τα πιο κάτω υποσύνολα είναι υπόχωροι.

(i) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1+x_2-x_3-x_4=0\}$

(ii) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \ : \ ab=1 \right\}$