ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
ΜΑΣ 005

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Πέμπτη 24 Μαΐου, 2007

Να λυθούν πέντε (5) θέματα.

---

1. (α) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ του σημείου $(1, 4, -3)$ και της ευθείας $x = 2 + t,\ y = -1 - t,\ z = 3t$.

(β) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $P(1, 0, -1)$ και $Q(2, 1, 0)$ και είναι παράλληλο με την ευθεία η οποία είναι η τομή των επιπέδων $x + y + z = 5$ και $3x - y = 4$.

(γ) Αν τα διανύσματα $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$ είναι μη-μηδενικά και κάθετα μεταξύ τους, τότε κάθε διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$. Δηλαδή,

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

όπου $c_1,\ c_2,\ c_3$ είναι σταθερές. Να αποδειχθεί ότι

$$c_i = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k},\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ και $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα να γραφεί το διάνυσμα $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$.

2. Να δοθούν οι ορισμοί των μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{T}(t)$ και $\mathbf{N}(t)$.

Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{T}$ και $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Η καμπυλότητα ορίζεται από τον τύπο $\kappa = \left\|\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right\|$. Επίσης δίνεται ότι $s = \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u}\right\|\mathrm{d}u$. Να δειχθεί ότι

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa\mathbf{N}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση για την ταχύτητα, $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{T} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathbf{T}$, να αποδειχθεί η σχέση για την επιτάχυνση,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{T} + \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathbf{N}.$$

Ένα σωματίδιο κινείται σε καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = \frac{3}{2}t^2, \quad y(t) = \frac{4}{3}t^3.$$

Να βρεθούν η εφαπτομενική και κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης όταν $t = 1$.

3. (α) (i) Να δειχθεί ότι το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

δεν υπάρχει.

(ii) Να δειχθεί ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

(β) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης, να δειχθεί ότι η $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$, όπου c είναι σταθερά, ικανοποιεί την κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

(γ) Δίνεται ότι $D_{\mathbf{u}}f(1,2) = -5$ αν $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$ και $D_{\mathbf{v}}f(1,2) = 10$ αν $\mathbf{v} = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$. Να βρεθούν:

(i) $\nabla f(1,2)$

(ii) η κατευθυντική παράγωγος της f στο σημείο $(1,2)$ στην κατεύθυνση της αρχής των αξόνων.

(δ) Να βρεθεί το σημείο της επιφάνειας $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y$ στο οποίο το εφαπτόμενο επίπεδο είναι οριζόντιο (δηλαδή, έχει εξίσωση της μορφής $z =$σταθερά).

4. (α) Να βρεθούν τα σχετικά ακρότατα και σαγματικά σημεία (αν υπάρχουν) της συνάρτησης $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 2y^3 + 12x - 24y$.

(β) Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$ στο κλειστό και φραγμένο σύνολο R, όπου R είναι η τριγωνική περιοχή με κορυφές (0,0), (0,2) και (2,0).

(γ) Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας $x^2 - yz = 5$ τα οποία είναι τα πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

5. (α) Έστω ο πίνακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Να δειχθεί ότι $\mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2 - 12\mathbf{A} + 27\mathbf{I} = \mathbf{0}$, όπου $\mathbf{I}$ και $\mathbf{0}$ είναι ο ταυτοτικός και μηδενικός πίνακας, αντίστοιχα.
Αν ο $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος, να δειχθεί ότι $27\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + 12\mathbf{I}$.
Στη συνέχεια να υπολογιστεί ο $\mathbf{A}^{-1}$.
Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 12 \\ x - y - 2z &= -4 \\ x + 5y - z &= 10 \end{aligned}$$

(β) Χωρίς να αναπτυχθεί η ορίζουσα (δηλαδή, να χρησιμοποιηθούν μόνο ιδιότητες των οριζουσών), να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1 + x + x^2 & x & x^2 \\ 1 + y + y^2 & y & y^2 \\ 1 + z + z^2 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x - y)(y - z)(z - x).$$

6. (α) (i) Έστω ότι V είναι ένας διανυσματικός χώρος. Να δοθούν οι συνθήκες έτσι ώστε το σύνολο W να είναι υπόχωρος του V.
(ii) Έστω $\mathbf{v}$ είναι ένα συγκεκριμένο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ και S είναι το σύνολο των $m \times n$ πινάκων A τέτοιοι ώστε $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, όπου $\mathbf{0}$ είναι μηδενικό διάνυσμα. Να δοθεί η διάσταση του μηδενικού διανύσματος και να δειχθεί ότι το S είναι υπόχωρος του M_{mn} (διανυσματικός χώρος των $m \times n$ πινάκων).

(β) (i) Αν $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, να δειχθεί ότι $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
(ii) Αν $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες τέτοιοι ώστε $(\mathbf{BA}^{-1})^{-1} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, να εκφραστεί ο πίνακας $\mathbf{A}$ συναρτήσει των $\mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$.

(γ) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a, για την οποία το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= a \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

έχει λύσεις. Γι' αυτή την τιμή του a να λυθεί το σύστημα.

7. Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο αντίστροφο πίνακα, να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 4x + 2y + z &= 15 \\ 2x - y - 2z &= -1 \\ x - 2y - 3z &= -7 \end{aligned} .$$

Να δειχθεί ότι τα διανύσματα

$$(4, 2, 1),\ (2, -1, -2),\ (1, -2, -3)$$

αποτελούν μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

Να βρεθούν οι συντεταγμένες το διανύσματος $(15, -1, -7)$ ως προς την πιο πάνω βάση.

Χρησιμοποιώντας την διαδικασία των Gram-Schmidt να μετασχηματιστεί η πιο πάνω βάση του $\mathbb{R}^3$ σε ορθοκανονική.

8. (α) Να λυθεί το γραμμικό σύστημα (με τη μέθοδο των Gauss-Jordan)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 15 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 28 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 24 \end{array} .$$

Να εξεταστεί αν τα πιο κάτω σύνολα είναι γραμμικά ανεξάρτητα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$x^3 + x^2 + 2x + 3,\quad 3x^3 + 15x^2 + 28x + 24,\quad -3x^3 + 2x^2 + 3x + 2,\quad x^3 + 2x^2 + x - 5.$$

(β) Έστω οι πίνακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & -4 & 7 \\ b & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix},\quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b τέτοιες ώστε ο πίνακας $\mathbf{B}$ να είναι ο αντίστροφος του πίνακα $\mathbf{A}$.

Να λυθεί η εξίσωση

$$\mathbf{CX} + 5\mathbf{X} = \mathbf{D}$$

ως προς το πίνακα $\mathbf{X}$.