ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
ΜΑΣ 005

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Κυριακή 22 Μαΐου, 2005

Να λυθούν πέντε (5) θέματα.

---

1. (α) Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας η οποία είναι η τομή των επιπέδων $2x + y + z = 4$ και $3x - y + z = 3$.
(β) Να δειχθεί ότι οι ευθείες

$$x = 1 + t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = 2 + t \quad \text{και} \quad x = 2 + t, \quad y = 2 + 3t, \quad z = 4 + 2t$$

τέμνονται. Στη συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τις πιο πάνω ευθείες.
(γ) Να δειχθεί ότι η ευθεία $x = -1+t,\ y = 3+2t,\ z = -t$ και το επίπεδο $2x-2y-2z+3 = 0$ είναι παράλληλα και να βρεθεί η απόσταση μεταξύ τους.

2. (α) Ένα σωματίδιο εκτοξεύεται από το έδαφος με ταχύτητα 60 m/sec που σχηματίζει γωνία 30^o με την οριζόντια. Να βρεθούν:
(i) ο χρόνος που χρειάστηκε το σωματίδιο να φθάσει στο μέγιστο ύψος,
(ii) το μέγιστο ύψος,
(iii) ο χρόνος που χρειάστηκε το σωματίδιο μέχρι να επιστρέψει στο έδαφος,
(iv) η οριζόντια απόσταση που κάλυψε το σωματίδιο,
(v) να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου.
$[g = 10 \text{ m s}^{-2}]$

(β) Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\mathbf{k}$ στο διάστημα $-1 \leq t \leq 1$.

3. (α) Να δοθεί ο ορισμός της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x,y)$ στο σημείο (x_0,y_0).
Να δειχθεί ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x_0,y_0), τότε η f είναι συνεχής στο (x_0,y_0).

(β) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης, να δειχθεί ότι η $u(x,t)=f(x+2t)+g(x-2t)$ ικανοποιεί την κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

(γ) Έστω η συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{y}{x+y}$. Να βρεθεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ τέτοιο ώστε $\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(2,3)=0$.

(δ) Να δειχθεί ότι οι επιφάνειες

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\ \text{ και }\ z=\frac{1}{10}(x^2+y^2)+\frac{5}{2}$$

τέμνονται στο σημείο $(3,4,5)$ και ότι έχουν κοινό εφαπτόμενο επίπεδο σε αυτό το σημείο.

4. (α) Να βρεθούν τα σχετικά μέγιστα, σχετικά ελάχιστα και σαγματικά σημεία (αν υπάρχουν) της $f(x,y)=2x^2-4xy+y^4+2$.

(β) Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)=xy-2x$ στο κλειστό και φραγμένο σύνολο R, όπου R είναι η τριγωνική περιοχή με κορυφές (0,0), (0,4) και (4,0).

5. Χωρίς να αναπτυχθεί η ορίζουσα (δηλαδή, να χρησιμοποιηθούν μόνο ιδιότητες των οριζουσών), να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3(a+3).$$

Να υπολογιστεί η τιμή της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 12 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 15 \end{vmatrix}.$$

Να βρεθούν οι τιμές τις σταθεράς k για τις οποίες το πιο κάτω σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

$$\begin{array}{rcl} kx_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + kx_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + kx_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + kx_4 & = & 0 \end{array}$$

Να βρεθεί η λύση του πιο πάνω συστήματος όταν (i) $k = 0$ και όταν (ii) $k = -3$.

Να εξεταστεί αν τα διανύσματα

$$(-3, 2, 1, 1),\ (1, -6, 1, 1),\ (1, 2, -3, 1),\ (1, 2, 1, -3)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

6. Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 12 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & & = & 11 \\ -x_1 & + & x_2 & + & & + & 4x_4 & = & 17 \end{array}.$$

Να δειχθεί ότι τα διανύσματα

$$(1, 2, 1, -1),\ (1, 3, 2, 1),\ (1, 3, 3, 0),\ (1, -1, 0, 4)$$

αποτελούν μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$.

Να βρεθούν οι συντεταγμένες το διανύσματος $(10, 12, 11, 17)$ ως προς την πιο πάνω βάση.

Χρησιμοποιώντας την διαδικασία των Gram-Schmidt να μετασχηματιστεί η πιο πάνω βάση του $\mathbb{R}^4$ σε ορθοκανονική.

[**Σημείωση**: Να βρεθούν τα μόνο τα δύο διανύσματα και να δοθούν οι τύποι που ορίζουν τα άλλα δύο.]

7. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έστω οι πίνακες

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Να γίνουν οι πολλαπλασιασμοί $\mathbf{AB}$ και $\mathbf{AD}$.

Να λυθούν ως προς τον πίνακα $\mathbf{X}$ οι πιο κάτω εξισώσεις:

(i) $\mathbf{BX} = \mathbf{I}$

(ii) $\mathbf{CX} = \mathbf{X} + \mathbf{D}$

(iii) $\mathbf{XD} + 2\mathbf{X} = \mathbf{E}$,

όπου $\mathbf{I}$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας.

Να γραφεί ο πίνακας $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 8 & 15 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$ ως γραμμικός συνδυασμός των πινάκων

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. (α) Έστω ότι V είναι το σύνολο των ορισμένων ολοκληρωμάτων στο διάστημα $[a, b]$. Να δειχθεί ότι το σύνολο V είναι ένας διανυσματικός χώρος.

[**Σημείωση**: Να δειχθεί μόνο ότι το σύνολο V είναι κλειστό ως προς τη πρόσθεση, κλειστό ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό και να δοθεί το μηδενικό και αντίθετο διάνυσμα.]

(β) Έστω M_{22} είναι ο διανυσματικός χώρος των 2×2 πινάκων.

Να δειχθεί ότι το υποσύνολο του M_{22} που αποτελείται από πίνακες με θετικά στοιχεία, δεν είναι υπόχωρος του M_{22}.

Να δειχθεί ότι το υποσύνολο του M_{22} που αποτελείται από πίνακες που έχουν ίχνος ίσο με μηδέν, είναι υπόχωρος του M_{22}.

[**Σημείωση**: Ορίζουμε ως ίχνος ενός πίνακα το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.]

(γ) Να εξεταστεί κατά πόσο το σύνολο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων που ικανοποιούν την εξίσωση

$$f' + 2f = 0$$

είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του διανυσματικού χώρου των πραγματικών συναρτήσεων.