Κεφάλαιο 3

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

3.1 Εισαγωγή

Έστω ότι S είναι ένα σύνολο από σημεία στον $n-$διάστατο χώρο. Μια **συνάρτηση** (που ορίζεται στο S) είναι μια σχέση η οποία σχετίζει κάθε στοιχείο του S με ένα αριθμό. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

μας δίνει την απόσταση του σημείου $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ από την αρχή των αξόνων.

Φυσικό πεδίο ορισμού: Αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f δεν προσδιορίζεται, τότε το συνόλο των σημείων για τα οποία ο τύπος της f δίνει ένα πραγματικό αριθμό (δηλαδή, η f ορίζεται), καλείται **φυσικό πεδίο ορισμού**. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x,y) = 6x^2y^2 - x\sqrt{y} + 5$ έχει φυσικό πεδίο ορισμού $y \geq 0$ και η $f(x,y) = \ln(x^2 - y)$ έχει φυσικό πεδίο ορισμού $x^2 - y > 0 \Rightarrow y < x^2$.

Όπως και για τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, ορίζουμε τη **γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης f n μεταβλητών, $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$, να είναι το σύνολο των σημείων στον $(n+1)$-διάστατο χώρο της μορφής

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

όπου $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι το πεδίον ορισμού της συνάρτησης f. Για παράδειγμα, για $n = 2$ η γραφική παράσταση της f είναι το σύνολο των σημείων

$$(x, y, f(x, y)).$$

Για κάθε αριθμό c, η εξίσωση $f(x, y) = c$ είναι η εξίσωση μιας καμπύλης στο επίπεδο. Αυτή η καμπύλη καλείται **ισοσταθμική καμπύλη** της f στο σημείο $(0, 0, c)$. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης τέτοιων καμπυλών μπορούμε να έχουμε μια καλή περιγραφή της f.

Παράδειγμα: Έστω $f(x, y) = x^2 + y^2$. Οι ισοσταθμικές καμπύλες ορίζονται από τις καμπύλες

$$x^2 + y^2 = c, \quad c \geq 0$$

οι οποίες είναι κύκλοι ακτίνας $\sqrt{c}$.

Η γραφική παράσταση της $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ στο 3-διάστατο χώρο είναι

Στη περίπτωση των συναρτήσεων 3 μεταβλητών, $f(x, y, z)$, οι εξισώσεις

$$f(x, y, z) = c$$

καλούνται **ισοσταθμικές επιφάνειες**.

Παράδειγμα: Έστω $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$. Οι ισοσταθμικές επιφάνειες ορίζονται από τις εξισώσεις

$$x^2 + y^2 + z^2 = c, \quad c \geq 0$$

οι οποίες είναι σφαίρες ακτίνας $\sqrt{c}$.

Έχουμε δει ότι στον $\mathbb{R}^3$ οι επιφάνειες ορίζονται παραμετρικά από τρεις εξισώσεις που περιέχουν μια παράμετρο. Ανάλογα, οι επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$ μπορούν να οριστούν παραμετρικά από τρεις εξισώσεις που περιέχουν δύο παραμέτρους. Δηλαδή,

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v),$$

όπου u και v είναι παράμετροι, ή ως διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{r}(u, v) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}.$$

Παράδειγμα: Έστω

$$z = 16 - x^2 - y^2.$$

Θέτουμε $x = u$ και $y = v$, οπότε η επιφάνεια ορίζεται παραμετρικά ως

$$x = u, \quad y = v, \ z = 16 - u^2 - v^2$$

ή

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (16 - u^2 - v^2)\mathbf{k}.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση της επιφάνειας η οποία ορίζεται από τη διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{r}(u, v) = 3u\cos v\mathbf{i} + 4u\sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}, \quad 0 \leq u \leq 1, \ 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Λύση:

3.2 Όρια και συνέχεια

Για τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής υπάρχουν μόνο δύο διαδρομές με τις οποίες ένα σημείο προσεγγίζει ένα άλλο (πλευρικά όρια),

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

Για τις συναρτήσεις δύο μεταβλητών υπάρχουν άπειρες διαδρομές (καμπύλες) με τις οποίες ένα σημείο προσεγγίζει ένα άλλο.

Αν C είναι μια ομαλή παραμετρική καμπύλη,

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

και αν $x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0)$, τότε ορίζουμε

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (\text{κατά μήκος της } C)}} f(x,y) = \lim_{t\to t_0} f\left(x(t), y(t)\right)$$

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ κατά μήκος (a) της παραβολής $y = x^2$, (b) της ευθείας $y = x$.

Λύση:

Τα όρια κατά μήκος συγκεκριμένων καμπύλων δεν μας δίνουν τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης σε ολόκληρη τη περιοχή γύρω από ένα σημείο.

Ορισμός: Έστω $f = f(x, y)$. Γράφουμε

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

αν για κάθε αριθμό $\epsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε ένα αριθμό $\delta > 0$ έτσι ώστε η συνάρτηση $f(x, y)$ να ικανοποιεί την ανισότητα

$$|f(x, y) - L| < \epsilon$$

όταν (x, y) ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και η απόσταση μεταξύ (x, y) και (x_0, y_0) ικανοποιεί τη σχέση

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

[Δηλαδή, το σημείο (x, y) βρίσκεται σε ανοιχτό δίσκο με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα δ.]

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

Λύση:

Θεώρημα: Αν μια συνάρτηση $f(x,y)$ έχει όριο L όταν (x,y) τείνει στο (x_0,y_0), τότε η συνάρτηση $f(x,y)$ έχει το ίδιο όριο L όταν (x,y) τείνει στο (x_0,y_0) κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης.

Παράδειγμα: Στο προηγούμενο παράδειγμα, είχαμε δείξει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

Αν επιλέξουμε το $(x,y)\to(0,0)$ κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης, τότε θα βρούμε ότι το πιο πάνω όριο είναι ίσο με μηδέν. Έστω

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (\text{κατά μήκος της } y=x)}} \frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0}\frac{2t^3-t^3}{t^2+t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t^2} = \lim_{t\to 0} t = 0.$$

Συνέχεια: Η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι **συνεχής** στο σημείο (x_0,y_0) αν

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} = f(x_0,y_0).$$

Αν η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι είναι συνεχής. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου έχουμε:

Θεώρημα: Αναγκαία και ικανή συνθήκη έτσι ώστε η συνάρτηση $f(x,y)$ να είναι **συνεχής** στο σημείο (x_0,y_0), είναι για κάθε $\epsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$ τέτοια ώστε

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon \quad \text{όταν} \quad \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta.$$

Παράδειγμα: Η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

είναι συνεχής στο $(0,0)$, επειδή

$$\begin{aligned} |f(x,y)-f(0,0)| &= \left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| = |x||y|\frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \\ &< |x||y| < \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2} = x^2+y^2 < \epsilon \end{aligned}$$

όταν $(x-0)^2+(y-0)^2<\epsilon$. Δηλαδή, από το θεώρημα επιλέγουμε $\delta=\sqrt{\epsilon}$.

Θεώρημα: (α) Αν οι g και h είναι συνεχείς συναρτήσεις μιας μεταβλητής, τότε $f(x,y)=g(x)h(y)$ είναι συνεχής συνάρτηση των x και y.

(β) Αν g είναι συνεχής συνάρτησης μιας μεταβλητής και h είναι συνεχής συνάρτησης δύο μεταβλητών, τότε η σύνθεση $f(x,y)=g(h(x,y))$ είναι συνεχής συνάρτηση των x και y.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση x^5y^3 είναι συνεχής. Η συνάρτηση $\sin(x^5y^3)$ είναι συνεχής.

Επιπρόσθετα του πιο πάνω θεωρήματος ισχύουν τα πιο κάτω:

(i) Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

(ii) Το άθροισμα, η διαφορά και το γινόμενο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

(iii) το πηλίκο δύο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής, εκτός στα σημεία που μηδενίζεται ο παρανομαστής.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $1 + x^2y + x^3y^2$ είναι συνεχής. Η συνάρτηση $\frac{x^2y}{1-xy}$ είναι συνεχής, εκτός στα σημεία που βρίσκονται πάνω στην υπερβολή $xy = 1$.

3.3 Μερικές Παράγωγοι

Έστω $f = f(x,y)$. Αν διατηρήσουμε το y σταθερό, $y = y_0$, τότε η f γίνεται συνάρτηση μιας μεταβλητής. Αν η παράγωγος στο $x = x_0$ υπάρχει, τότε η παράγωγος της $f(x, y_0)$ στο x_0 καλείται **μερική παράγωγος** της $f(x,y)$ ως προς x στο σημείο (x_0, y_0).

Ανάλογα, αν διατηρήσουμε το x σταθερό, $x = x_0$, τότε η f γίνεται συνάρτηση μόνο της y. Αν η παράγωγος στο $y = y_0$ υπάρχει, τότε η παράγωγος της $f(x_0, y)$ στο y_0 καλείται **μερική παράγωγος** της $f(x,y)$ ως προς y στο σημείο (x_0, y_0).

Γενικά, έχουμε

Ορισμός: Οι **μερικές παράγωγοι** της $f(x,y)$ ως προς x και y, αντίστοιχα, ορίζονται ως

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

Παράδειγμα: Έστω $f(x,y) = x^2y^2 + xy^2 + 2xy + 4y$. Να βρεθούν: $f_x(1,1),\ f_y(2,0)$.

Λύση:

Παράδειγμα: Έστω $z = \frac{x+y}{x-y}$. Να βρεθούν: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Λύση:

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι πρώτες μερικές παράγωγοι της $f(x, y, z) = (4x - 3y + 2z)^5$.

Λύση:

Παράγωγοι ανώτερης τάξης: Επειδή οι μερικές παράγωγοι $f_x,\ f_y$ είναι συναρτήσεις των x και y, και αυτές με την σειρά τους θα έχουνε μερικές παραγώγους. Έτσι ορίζουμε 4 μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(x,y)$:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Αν f_{xy} και f_{yx}, οι οποίες καλούνται μικτές παράγωγοι, είναι συνεχείς, τότε $f_{xy} = f_{yx}$. Δηλαδή, δεν έχει σημασία η σειρά παραγώγισης.

Ανάλογα, ορίζονται οι μερικές παράγωγοι τρίτης τάξης κ.ο.κ. Για παράδειγμα,

$$f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \quad f_{yyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$$

Παράδειγμα: Έστω $f(x,y) = x^4y^3 + 2x^3y + 3xy^2$. Να βρεθεί η f_{xyy}.

Λύση:

Μερικές παράγωγοι διανυσματικών συναρτήσεων: Έστω

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$$

τότε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \neq \mathbf{0}$ και $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq \mathbf{0}$ είναι συνεχείς. Τότε το διάνυσμα $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ είναι εφαπτόμενο στη u-καμπύλη (v διατηρείται σταθερό) στο (u_0, v_0) και ανάλογα το διάνυσμα $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ είναι εφαπτόμενο στη v-καμπύλη. Επομένως αν

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq \mathbf{0},$$

τότε το διάνυσμα

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\|}$$

είναι κάθετο στα διανύσματα $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ και $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ στο σημείο (u_0, v_0). Καλούμε το διάνυσμα $\mathbf{n}$ **μοναδιαίο κάθετο** στην επιφάνεια $\mathbf{r}(u, v)$ στο σημείο $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ και ορίζουμε ως **εφαπτόμενο επίπεδο** της $\mathbf{r}(u, v)$ στο σημείο $\mathbf{r}(u_0, v_0)$, το επίπεδο που διέρχεται από το $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ και έχει το $\mathbf{n}$ ως κάθετο διάνυσμα.

Παράδειγμα: ΄Εστω η σφαίρα με ακτίνα a,

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \sin\phi \cos\theta \mathbf{i} + a \sin\phi \sin\theta \mathbf{j} + a \cos\phi \mathbf{k},$$

όπου $0 \leq \phi \leq \pi$ και $0 \leq \theta < 2\pi$. Να δειχθεί ότι σε κάθε σημείο της σφαίρας το εφαπτόμενο επίπεδο είναι κάθετο στο διάνυσμα θέσης.

Λύση:

3.4 Παραγωγίσιμες συναρτήσεις - Κανόνας αλυσίδας

Έστω $f = f(x, y)$, τότε Δf καλείται η **αύξηση** της f, η οποία συμβολίζει την αλλαγή της f όταν (x, y) αλλάζει από μια αρχική θέση (x_0, y_0) σε μια άλλη θέση $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Δηλαδή,

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Ορισμός: Η $f = f(x, y)$ καλείται **παραγωγίσιμη** ή **διαφορίσιμη** στο σημείο (x_0, y_0) αν $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$ υπάρχουν και Δf μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

όπου ϵ_1 και ϵ_2 είναι συναρτήσεις των Δx και Δy τέτοιες ώστε $\epsilon_1 \to 0$ και $\epsilon_2 \to 0$ όταν $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Θεώρημα: Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x_0, y_0), τότε η f είναι συνεχής στο (x_0, y_0).

Απόδειξη:

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση f έχει πρώτης τάξης μερικές παραγώγους σε κάθε σημείο σε κάποια κυκλική περιοχή με κέντρο το (x_0, y_0) και αν αυτές οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς στο σημείο (x_0, y_0), τότε η $f(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0).

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε το θεώρημα μέσης τιμής.

Κανόνας αλυσίδας: Αν y είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x και x είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του t, τότε από τον κανόνα αλυσίδας, έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Θεώρημα: Αν $x = x(t)$ και $y = y(t)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του t και αν $z = f(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση των x και y, τότε $z = f(x(t), y(t))$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του t και

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Απόδειξη:

Παράδειγμα: Έστω $z = \ln(2x^2 + y),\ x = \sqrt{t},\ y = t^{\frac{2}{3}}$. Να βρεθεί η $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

Λύση:

Παράδειγμα: Έστω $z = \sqrt{xy + y},\ x = \cos\theta,\ y = \sin\theta$. Να βρεθεί η $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta}$ όταν $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Λύση:

Θεώρημα: Αν $x = x(u, v)$ και $y = y(u, v)$ έχουν πρώτης τάξης μερικές παραγώγους στο σημείο (u, v) και αν $z = f(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(x(u, v), y(u, v))$, τότε $z = f(x(u, v), y(u, v))$ έχει πρώτης τάξης μερικές παραγώγους στο σημείο (u, v) οι οποίες δίνονται από τους τύπους

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{και} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Παράδειγμα: Έστω $z = x^2 - y\tan x,\ x = \frac{u}{v},\ y = u^2 v^2$. Να βρεθούν: $\frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v}$.

3.5 Εφαπτόμενα επίπεδα

Αν $P(x_0, y_0, z_0)$ είναι ένα σημείο πάνω στην επιφάνεια S και αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες των ομαλών καμπυλών που διέρχονται από το P (και βρίσκονται πάνω στην S) βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε θεωρούμε αυτό το επίπεδο ως το **εφαπτόμενο επίπεδο** της επιφάνειας S στο σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$.

Θεώρημα: Έστω ότι $P(x_0, y_0, z_0)$ είναι ένα σημείο της επιφάνειας $z = f(x, y)$. Αν η $f(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x_0, y_0), τότε αυτή η επιφάνεια έχει εφαπτόμενο επίπεδο στο P το οποίο έχει εξίσωση

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε την ύπαρξη του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο P, πρέπει να δείξουμε ότι όλες οι ομαλές καμπύλες της επιφάνειας $z = f(x, y)$ που διέρχονται από το P έχουν εφαπτομένες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Δηλαδή, πρέπει να δείξουμε ότι όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα στο P είναι κάθετα στο διάνυσμα

$$\mathbf{n} = \left(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\right).$$

Έστω ότι C είναι μια καμπύλη της $z = f(x, y)$ η οποία διέρχεται από το σημείο P και ορίζεται παραμετρικά

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

όπου s είναι μήκος τόξου. Έστω ότι $P(x_0, y_0, z_0)$ αντιστοιχεί στην τιμή $s = s_0$. Δηλαδή,

$$x_0 = x(s_0), \quad y_0 = y(s_0), \quad z_0 = z(s_0).$$

Επειδή η καμπύλη C βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια $z = f(x, y)$, κάθε σημείο της, $(x(s), y(s), z(s))$, ικανοποιεί την εξίσωση

$$z(s) = f(x(s), y(s)), \quad \forall s.$$

Παραγωγίζουμε ως προς s και χρησιμοποιούμε τον κανόνα αλυσίδας, για να βρούμε

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = 0 \Rightarrow$$

$$(f_x(x,y), f_y(x,y), -1) \cdot (x'(s), y'(s), z'(s)) = 0$$

Αν θέσουμε $s = s_0$, έχουμε

$$(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1) \cdot (x'(s_0), y'(s_0), z'(s_0)) = 0$$

Το διάνυσμα $(x'(s_0), y'(s_0), z'(s_0))$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο P και αυτό το διάνυσμα είναι κάθετο στο

$$\mathbf{n} = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1)\,.$$

Αν η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x_0,y_0), τότε το διάνυσμα

$$\mathbf{n} = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1)$$

καλείται **κάθετο διάνυσμα** της επιφάνειας $z = f(x,y)$ στο σημείο $P(x_0,y_0,z_0)$. Η ευθεία που διέρχεται από το P και είναι παράλληλη με το $\mathbf{n}$ καλείται **κάθετη ευθεία γραμμή** και έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = x_0 + tf_x(x_0,y_0), \quad y = y_0 + tf_y(x_0,y_0), \quad z = z_0 - t.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο και η κάθετη ευθεία της $z = x\mathrm{e}^{-y}$ στο σημείο $P(1,0,1)$.

Λύση:

Διαφορικό:

Έχουμε δει ότι για συναρτήσεις μιας μεταβλητής $y = f(x)$, το **διαφορικό**

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x$$

αντιπροσωπεύει την αλλαγή του y κατά μήκος της εφαπτομένης στο (x_0, y_0) όταν το x αλλάζει κατά $\mathrm{d}x$. Επίσης

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

αντιπροσωπεύει την αλλαγή του y κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$ όταν το x αλλάζει κατά Δx.

Ανάλογα, αν $z = F(x, y)$ μπορούμε να ορίσουμε $\mathrm{d}z$ να είναι η αλλαγή της z κατά μήκος του εφαπτόμενου επιπέδου στο (x_0, y_0, z_0) όταν x και y αλλάζουν κατά $\mathrm{d}x$ και $\mathrm{d}y$, αντίστοιχα. Επίσης

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

αντιπροσωπεύει την αλλαγή του z κατά μήκος της επιφάνειας $z = f(x, y)$ όταν το x και y αλλάζουν κατά Δx και Δy, αντίστοιχα.

Για να βρούμε τον τύπο για το $\mathrm{d}z$, έστω $P(x_0, y_0, z_0)$ ένα σημείο της επιφάνειας $z = f(x, y)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x_0, y_0), τότε η επιφάνεια έχει εφαπτόμενο επίπεδο στο P το οποίο έχει εξίσωση

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

ή

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Από την πιο πάνω εξίσωση, όταν $x = x_0,\ y = y_0$, το εφαπτόμενο επίπεδο έχει ύψος z_0 και όταν $x = x_0 + \mathrm{d}x,\ y = y_0 + \mathrm{d}y$ έχει ύψος

$$z_0 + f_x(x_0, y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\mathrm{d}y.$$

Άρα η αλλαγή $\mathrm{d}z$ του ύψους του εφαπτόμενου επιπέδου όταν (x, y) αλλάζει από (x_0, y_0) σε $(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y)$ είναι ίση με (αφαιρούμε το z_0 από την πιο πάνω σχέση)

$$\mathrm{d}z = f_x(x_0, y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\mathrm{d}y.$$

Αυτή η ποσότητα καλείται **ολικό διαφορικό** της z στο (x_0, y_0). Γενικά,

$$\mathrm{d}z = f_x(x, y)\mathrm{d}x + f_y(x, y)\mathrm{d}y.$$

Τώρα, αν $z = f(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x, y), τότε η αύξηση Δz γράφεται

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

όπου $\epsilon_1 \to 0,\ \epsilon_2 \to 0$ όταν $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Στην περίπτωση όπου $\mathrm{d}x = \Delta x$ και $\mathrm{d}y = \Delta y$, έχουμε

$$\Delta z = \mathrm{d}z + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y.$$

Όταν $\mathrm{d}x = \Delta x$ και $\mathrm{d}y = \Delta y$ είναι μικρές ποσότητες, τότε

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z.$$

Γεωμετρικά, αυτή η προσέγγιση δηλώνει ότι η αλλαγή του z κατά μήκος της επιφάνειας και η αλλαγή του z κατά μήκος του εφαπτόμενου επιπέδου είναι κατά προσέγγιση ίσες όταν $\mathrm{d}x = \Delta x$ και $\mathrm{d}y = \Delta y$ είναι μικρές ποσότητες.

Παράδειγμα: Έστω $z = 4x^2 \cos y$. Να βρεθεί η $\mathrm{d}z$.

Λύση:

Παράδειγμα: Έστω $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Να βρεθεί κατά προσέγγιση η αλλαγή της f όταν το (x, y) αλλάζει από το σημείο $(3, 4)$ στο σημείο $(3.04, 3.98)$.

Λύση:

Παράδειγμα: Η ακτίνα ενός ορθο-κυκλικού κυλίνδρου έχει μετρηθεί με μέγιστο σφάλμα 2% και το ύψος με μέγιστο σφάλμα 4%. Να βρεθεί κατά προσέγγιση το μέγιστο σφάλμα του όγκου του κυλίνδρου.

Λύση:

3.6 Κατευθυντική παράγωγος - Κλίση συνάρτησης δύο μεταβλητών

Όπως θα δούμε πιο κάτω μια επιφάνεια $z = f(x, y)$ μπορεί να έχει διαφορετικές κλίσεις σε διαφορετικές κατευθύνσεις από ένα σημείο (x_0, y_0, z_0) πάνω στην επιφάνεια.

Έστω το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}(u_1, u_2)$ στο επίπεδο xy και έστω l η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\mathbf{u}$. Οι παραμετρικές εξισώσεις της l συναρτήσει του s είναι

$$x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2.$$

Έστω η επιφάνεια $z = f(x, y)$ και επομένως

$$z = f(x_0 + su_1, y_0 + su_2).$$

Παραγωγίζουμε ως προς s, για να βρούμε το ρυθμό μεταβολής του z,

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = f_x u_1 + f_y u_2$$

και

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$$

Συνοπτικά έχουμε

Ορισμός: Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x_0, y_0) και αν $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, τότε η **κατευθυντική παράγωγος** της f στο (x_0, y_0) στην κατεύθυνση του $\mathbf{u}$ ορίζεται ως

$$\mathrm{D}_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2.$$

Σημειώσεις: 1. Επειδή $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$, όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\mathbf{u}$ με το θετικό άξονα των x, βρίσκουμε

$$\mathrm{D}_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\sin\theta.$$

2. Στην ειδική περίπτωση όπου $\mathbf{u} = \mathbf{i} = (1, 0)$, έχουμε $\mathrm{D}_{\mathbf{i}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$ και όταν $\mathbf{u} = \mathbf{j} = (0, 1)$ έχουμε $\mathrm{D}_{\mathbf{j}}f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$. Άρα οι μερικές παράγωγοι ως προς x και y μπορούν να θεωρηθούν ως οι κατευθυντικές παράγωγοι στην κατεύθυνση του θετικού άξονα των x και του θετικού άξονα των y, αντίστοιχα.

3. $\mathrm{D}_{-\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = -\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η κατευθυντική παράγωγος της $f(x, y) = (1 + xy)^{\frac{3}{2}}$ στο σημείο (3,1) στην κατεύθυνση του $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$.

Λύση:

Παράδειγμα: Να βρεθεί η κατευθυντική παράγωγος της $f(x, y) = 4x^3y^2$ στο σημείο (2,1) στην κατεύθυνση του $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

Λύση:

Κλίση συνάρτησης: Η κατευθυντική παράγωγος

$$\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)u_1 + f_y(x, y)u_2.$$

γράφεται

$$\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(x, y) = (f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}) \cdot (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}).$$

Το πρώτο διάνυσμα στο δεξιό μέλος καλείται **κλίση της συνάρτησης** f και συμβολίζεται με $\nabla f(x, y)$. Δηλαδή,

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}.$$

Επομένως η κατευθυντική παράγωγος γράφεται

$$\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u}.$$

Όπως θα δούμε στο πιο κάτω θεώρημα το μήκος και η κατεύθυνση της $\nabla f(x,y)$ μας δίνουν σημαντικές πληροφορίες για την $f(x,y)$.

Θεώρημα: Έστω ότι η $f = f(x,y)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο σημείο (x_0, y_0).

(α) Αν $\nabla f(x_0,y_0) = \mathbf{0}$, τότε όλες οι κατευθυντικές παράγωγοι της f στο σημείο (x_0,y_0) είναι μηδέν.

(β) Αν $\nabla f(x_0,y_0) \neq \mathbf{0}$, τότε μεταξύ όλων των κατευθυντικών παραγώγων στο σημείο (x_0,y_0), η παράγωγος στην κατεύθυνση του $\nabla f(x_0,y_0)$ έχει τη μέγιστη τιμή η οποία είναι $\|\nabla f(x_0,y_0)\|$ και η παράγωγος στην αντίθετη κατεύθυνση του $\nabla f(x_0,y_0)$ έχει την ελάχιστη τιμή η οποία είναι ίση με $-\|\nabla f(x_0,y_0)\|$.

Απόδειξη: (α) Αν $\nabla f(x_0,y_0) = \mathbf{0}$, τότε $\forall \mathbf{u}$ έχουμε

$$\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

(β) Υποθέτουμε ότι $\nabla f(x_0,y_0) \neq \mathbf{0}$ και έστω θ η γωνία μεταξύ $\nabla f(x_0,y_0)$ και του $\mathbf{u}$. Έχουμε

$$\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(x_0,y_0)\| \|\mathbf{u}\| \cos\theta$$

και επειδή $\|\mathbf{u}\| = 1$,

$$\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0) = \|\nabla f(x_0,y_0)\| \cos\theta$$

Γνωρίζουμε ότι $-1 \leq \cos\theta \leq 1$. Επομένως η μέγιστη τιμή της $\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)$ συμβαίνει όταν $\cos\theta = 1$. Άρα $\theta = 0$. Δηλαδή, η μέγιστη τιμή της $\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)$ συμβαίνει όταν $\mathbf{u}$ έχει την κατεύθυνση του $\nabla f(x_0,y_0)$. Η ελάχιστη τιμή είναι $-\|\nabla f(x_0,y_0)\|$ και αυτή συμβαίνει όταν $\cos\theta = -1$. Άρα $\theta = \pi$. Δηλαδή, όταν το διάνυσμα $\mathbf{u}$ έχει την αντίθετη κατεύθυνση του $\nabla f(x_0,y_0)$.

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Να βρεθεί η μέγιστη κατευθυντική παράγωγος στο σημείο $(4,-3)$ και να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα σε αυτή την κατεύθυνση.

Λύση:

Στο πιο κάτω θεώρημα δίνουμε μια γεωμετρική σχέση μεταξύ των ισοσταθμικών καμπύλων και της κλίσης μιας συνάρτησης f δύο μεταβλητών.

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x_0, y_0), τότε η $\nabla f(x_0, y_0)$ είναι κάθετη στην ισοσταθμική καμπύλη της f η οποία διέρχεται από το (x_0, y_0).

Απόδειξη:

Έστω η ισοσταθμική καμπύλη $f(x, y) = c$, η οποία μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της παραμέτρου s,

$$f(x(s), y(s)) = c.$$

Παραγωγίζουμε ως προς s, (κανόνας αλυσίδας)

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = 0$$

η οποία γράφεται

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\mathbf{j}\right) = 0.$$

Στο σημείο (x_0, y_0) έχουμε $\nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u} = 0$ $[\mathbf{r}'(s) = \mathbf{T}(s)]$.

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$. Να γίνει η γραφική παράσταση της ισοσταθμικής καμπύλης στο σημείο $(3, 4)$ και να σχεδιαστεί το διάνυσμα ∇f σε αυτό το σημείο.

Λύση:

3.7 Μέγιστα - Ελάχιστα συναρτήσεων δύο μεταβλητών

Ορισμός: Η συνάρτηση $f(x,y)$ λέμε ότι έχει **σχετικό ή τοπικό μέγιστο** στο σημείο (x_0,y_0) αν υπάρχει κύκλος με κέντρο το (x_0,y_0) έτσι ώστε $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ για όλα τα σημεία (x,y) που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f και βρίσκονται μέσα στον κύκλο.
Αν $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ για όλα τα σημεία (x,y) που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f, τότε λέμε ότι η f έχει **απόλυτο μέγιστο** στο (x_0,y_0).

Ορισμός: Η συνάρτηση $f(x,y)$ λέμε ότι έχει **σχετικό ή τοπικό ελάχιστο** στο σημείο (x_0,y_0) αν υπάρχει κύκλος με κέντρο το (x_0,y_0) έτσι ώστε $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ για όλα τα σημεία (x,y) που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f και βρίσκονται μέσα στον κύκλο.
Αν $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ για όλα τα σημεία (x,y) που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f, τότε λέμε ότι η f έχει **απόλυτο ελάχιστο** στο (x_0,y_0).

Τα σχετικά ελάχιστα και μέγιστα καλούνται **σχετικά ακρότατα**. Τα απόλυτα ελάχιστα και μέγιστα καλούνται **απόλυτα ακρότατα**.

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση $f(x,y)$ έχει σχετικό ακρότατο στο σημείο (x_0,y_0) και αν οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν στο (x_0,y_0), τότε

$$f_x(x_0,y_0) = 0, \quad f_y(x_0,y_0) = 0.$$

Για τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής $f(x)$ ορίζουμε ως **κρίσιμο σημείο** το σημείο x_0 για το οποίο $f'(x_0) = 0$ ή $f'(x_0)$ δεν υπάρχει. Ανάλογα, το σημείο (x_0,y_0) καλείται **κρίσιμο σημείο** της συνάρτησης $f(x,y)$ αν $f_x(x_0,y_0) = 0$, $f_y(x_0,y_0) = 0$ ή αν τουλάχιστον μια από τις $f_x(x_0,y_0)$ και $f_y(x_0,y_0)$ δεν ορίζεται.

Τώρα, για τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, η συνθήκη $f'(x_0) = 0$ δεν είναι ικανή για να έχει η $f(x)$ σχετικό ακρότατο στο x_0. Έτσι και οι συνθήκες $f_x(x_0,y_0) = 0$, $f_y(x_0,y_0) = 0$ δεν είναι ικανές για να έχει η $f(x,y)$ σχετικό ακρότατο στο (x_0,y_0).

Παράδειγμα: Οι γραφικές παραστάσεις των

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) = x^2 + y^2 \\ z &= g(x,y) = 1 - x^2 - y^2 \\ z &= h(x,y) = y^2 - x^2 \end{aligned}$$

δίνονται στο πιο κάτω σχήμα.

Βρίσκουμε τις πρώτες μερικές παραγώγους

$$f_x = 2x, \qquad f_y = 2y$$
$$g_x = -2x, \qquad g_y = -2y$$
$$h_x = -2x, \qquad h_y = 2y$$

Άρα και στις 3 περιπτώσεις οι μερικές παραγώγους μηδενίζονται στο σημείο $(0,0)$. Δηλαδή, το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο. Από τις γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι η f έχει σχετικό ελάχιστο στο $(0,0)$ και η g έχει σχετικό μέγιστο στο $(0,0)$. Όμως η h δεν έχει σχετικό ακρότατο. Αυτό φαίνεται αν πάρουμε οποιοδήποτε κύκλο στο xy επίπεδο με κέντρο το $(0,0)$, υπάρχουν σημεία όπου η h είναι θετική (άξονας των y) και σημεία όπου η h είναι αρνητική (άξονας των x). Άρα $h(0,0) = 0$ δεν είναι ούτε ελάχιστη ούτε μέγιστη τιμή της $h(x,y)$ μέσα στον κύκλο.

Ένα κρίσιμο σημείο που δεν είναι σχετικό ακρότατο καλείται **σαγματικό σημείο**. Άρα το σημείο $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο της συνάρτησης $h(x,y) = y^2 - x^2$.

Για τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου εξετάζει την συμπεριφορά μιας συνάρτησης σε ένα κρίσιμο σημείο. Το ανάλογο κριτήριο για τις συναρτήσεις δύο μεταβλητών δίνεται στο πιο κάτω θεώρημα.

Θεώρημα: Έστω ότι η συνάρτηση $f = f(x,y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης σε κάποιο κύκλο που περιέχει το κρίσιμο σημείο (x_0, y_0) και έστω

$$\Delta = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0).$$

(α) Αν $\Delta > 0$ και $f_{xx} > 0$, τότε η f έχει σχετικό ελάχιστο στο (x_0, y_0).

(β) Αν $\Delta > 0$ και $f_{xx} < 0$, τότε η f έχει σχετικό μέγιστο στο (x_0, y_0).

(γ) Αν $\Delta < 0$, τότε η f έχει σαγματικό σημείο στο (x_0, y_0).

(δ) Αν $\Delta = 0$, δεν υπάρχει συμπέρασμα.

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα σχετικά ακρότατα και σαγματικά σημεία της

$$f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4.$$

Λύση:

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα σχετικά ακρότατα και σαγματικά σημεία της

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Απόλυτα ακρότατα: Θα εξετάσουμε πως να υπολογίζουμε απόλυτα ακρότατα. Τα δύο πιο κάτω θεωρήματα θα μας βοηθήσουν στον υπολογισμό των απόλυτων ακρότατων.

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής σε ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο R, τότε έχει απόλυτο μέγιστο και απόλυτο ελάχιστο στο R.

Παράδειγμα: Η περιοχή R της οποίας τα σημεία ικανοποιούν τις ανισώσεις $0 \leq x \leq a$ και $0 \leq y \leq b$ είναι ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο στο επίπεδο xy.

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση $f = f(x, y)$ έχει απόλυτο ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε αυτό το σημείο είναι κρίσιμο.

Για να υπολογίσουμε τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y)$ η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο R, ακολουθούμε τα πιο κάτω βήματα:

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f τα οποία βρίσκονται στο εσωτερικό του R.

2. Βρίσκουμε τα συνοριακά σημεία στα οποία μπορούν να εμφανιστούν απόλυτα ακρότατα.

3. Υπολογίζουμε την τιμή της $f(x, y)$ στα σημεία που έχουμε βρει στα βήματα 1 και 2. Η μεγαλύτερη τιμή της f δίνει το απόλυτο μέγιστο και η μικρότερη το απόλυτο ελάχιστο.

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$$

στη κλειστή τριγωνική περιοχή R με κορυφές στα σημεία (0,0), (3,0) και (0,5).

Λύση:

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου κουτιού, ανοιχτό από πάνω, το οποίο έχει όγκο 32 cm^3, έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί η ελάχιστη ποσότητα υλικού για την κατασκευή του.

Λύση:

3.8 Πολλαπλασιαστές του Lagrange

Στη προηγούμενη ενότητα είχαμε υπολογίσει το ελάχιστο της συνάρτησης

$$S = xy + 2xz + 2yz$$

υποκείμενη στη συνθήκη

$$xyz - 32 = 0.$$

Γενικά, σε αρκετά προβλήματα έχουμε να υπολογίσουμε ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z)$ υποκείμενη στη συνθήκη $g(x, y, z) = 0$. Όπως είχαμε δει στο προηγούμενο παράδειγμα, λύσαμε τη δεσμευτική συνθήκη ως προς z και αντικαταστήσαμε στη συνάρτηση S η οποία έγινε συνάρτηση δύο μεταβλητών. Στη συνέχεια βρήκαμε τα ακρότατα αυτής της νέας συνάρτησης με τη σύνηθες μέθοδο.

Όμως σε αρκετά προβλήματα δεν είναι δυνατό να λύσουμε τη δεσμευτική συνθήκη ως προς μια από τις μεταβλητές. Για αυτό πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική διαδικασία υπολογισμού ακρότατων συναρτήσεων υποκείμενες σε δεσμευτικές συνθήκες.

Θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Δηλαδή, θέλουμε να υπολογίσουμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y)$ υποκείμενη στη συνθήκη $g(x, y) = 0$. Το πιο κάτω θεώρημα μας δίνει μια μέθοδο υπολογισμού σχετικών ακρότατων συναρτήσεων υποκείμενες σε δεσμευτικές συνθήκες.

Θεώρημα: Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x, y)$ και $g(x, y)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει τη δεσμευτική καμπύλη $g(x, y) = 0$ και υποθέτουμε ότι $\nabla g \neq 0$ για κάθε σημείο πάνω στην καμπύλη. Αν η f έχει δεσμευτικό ακρότατο, τότε αυτό συμβαίνει στο (x_0, y_0) το οποίο βρίσκεται στη δεσμευτική καμπύλη όπου οι κλίσεις $\nabla f(x_0, y_0)$ και $\nabla g(x_0, y_0)$ είναι παράλληλες. Δηλαδή, υπάρχει κάποιος αριθμός λ, ο οποίος καλείται **πολλαπλασιαστής του Lagrange**, έτσι ώστε

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

Απόδειξη: Έστω ότι $z = f(x, y)$ και η δεσμευτική καμπύλη $g(x, y) = 0$ μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει της παραμέτρου s,

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

όπου το σημείο (x_0, y_0) αντιστοιχεί στην τιμή $s = s_0$. Άρα για ένα σημείο (x, y) η δεσμευτική καμπύλη γράφεται

$$z = f(x(s), y(s)).$$

Επειδή το σχετικό ακρότατο συμβαίνει στο σημείο (x_0, y_0), έχουμε $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = 0$, όταν $s = s_0$. Άρα

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\mathbf{j}\right).$$

Στο $s = s_0$, το πρώτο διάνυσμα είναι η κλίση της f στο σημείο (x_0, y_0) και το δεύτερο είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{u}$ της $g(x, y) = 0$ στο σημείο (x_0, y_0). Άρα στο $s = s_0$ έχουμε

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Δηλαδή, η κλίση της f στο σημείο (x_0, y_0) είναι κάθετη στο μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της $g(x, y) = 0$, το οποίο είναι κάθετο στη κλίση της g. Άρα

$$\nabla f(x_0, y_0) \ \ // \ \ \nabla g(x_0, y_0)$$

και επομένως

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το σημείο που βρίσκεται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ και δίνει μέγιστη τιμή στην $f(x, y) = xy$.

Λύση:

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι ακρότατες τιμές της $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ η οποία υπόκειται στις δεσμευτικές συνθήκες $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ και $z = x + y$.

Λύση: