# Κεφάλαιο 2

# ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

## 2.1 Εισαγωγή

Όπως και στον $\mathbb{R}^2$, έτσι και στον $\mathbb{R}^3$ μπορούμε να ορίσουμε μια καμπύλη παραμετρικά. Δηλαδή, να έχει τη μορφή

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

όπου $t$ είναι παράμετρος. Η καμπύλη που ορίζεται παραμετρικά μπορεί να εκφραστεί και σε διανυσματική μορφή

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Επίσης μπορούμε να γράφουμε

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

όπου $\mathbf{r}(t)$ καλείται **διανυσματική συνάρτηση**.

Οι πραγματικές συναρτήσεις $x(t), y(t), z(t)$ καλούνται **συνιστώσες συναρτήσεις** της $\mathbf{r}(t)$. Το **πεδίο ορισμού** της $\mathbf{r}(t)$ είναι το σύνολο των επιτρεπομένων τιμών της παραμέτρου $t$. Για παράδειγμα, έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sqrt{t-2}\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}.$$

Βρίσκουμε ότι η συνάρτηση $x(t) = \cos t$ έχει πεδίο ορισμού $t \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $y(t) = \sqrt{t-2}$ έχει πεδίο ορισμού $t \geq 2$ και η συνάρτηση $z(t) = \ln t$ έχει πεδίο ορισμού $t > 0$. Τώρα, η τομή των πιο πάνω διαστημάτων μας δίνει το πεδίο ορισμού της $\mathbf{r}(t)$. Δηλαδή, $t \geq 2$.

Ας υποθέσουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{r}$ έχει αρχικό σημείο το $O$ και τελικό σημείο το $P$. Καλούμε επίσης το $\mathbf{r}$ **διανυσματική ακτίνα** ή **διάνυσμα θέσης** του $P$.

**Μέτρο ή νόρμα του $\mathbf{r}(\mathbf{t})$**: Αν $\mathbf{r}(t)$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση, τότε το μέτρο $\|\mathbf{r}(t)\|$ είναι μια πραγματική συνάρτηση.

## 2.2 Απειροστικός λογισμός διανυσματικών συναρτήσεων

Επειδη οι συνιστώσες συναρτήσεις του $\mathbf{r}(t)$ είναι πραγματικές, από τη θεωρία των πραγματικών συναρτήσεων έχουμε τα πιο κάτω αποτελέσματα που ισχύουν για τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$:

(i) $\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t\to a} x(t)\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{t\to a} y(t)\right)\mathbf{j} + \left(\lim_{t\to a} z(t)\right)\mathbf{k}$

(ii) $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$

(iii) $\int \mathbf{r}(t)\mathrm{d}t = \left(\int x(t)\mathrm{d}t\right)\mathbf{i} + \left(\int y(t)\mathrm{d}t\right)\mathbf{j} + \left(\int z(t)\mathrm{d}t\right)\mathbf{k}$

(iv) $\int_a^b \mathbf{r}(t)\mathrm{d}t = \left(\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t)\mathrm{d}t\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b z(t)\mathrm{d}t\right)\mathbf{k}$

Στο (i) αν κάποιο όριο των συνιστωσών συναρτήσεων δεν υπάρχει, τότε λέμε ότι το όριο της $\mathbf{r}(t)$ δεν υπάρχει. Στο (ii) λέμε ότι η $\mathbf{r}(t)$ είναι παραγωγίσιμη αν όλες οι συνιστώσες συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες.

**Θεώρημα** (Κανόνες παραγώγισης): Έστω ότι $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$ και $\mathbf{r}_2(t)$ είναι διανυσματικές συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^3$, $f(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση, $k \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{c}$ είναι σταθερό διάνυσμα. Τότε ισχύουν οι πιο κάτω κανόνες παραγώγισης:

(i) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{c}] = \mathbf{0}$

(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k\mathbf{r}(t)] = k\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$

(iii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t)] = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t} \pm \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t}$

(iv) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)\mathbf{r}(t)] = f(t)\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(t)$

Επίσης έχουμε το πιο κάτω θεώρημα.

**Θεώρημα**: Αν $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$, τότε

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

με την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει.

**Απόδειξη**: Έχουμε $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. Άρα

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}\mathbf{i} + \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}\mathbf{j} + \lim_{h\to 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h}\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\frac{[x(t+h)\mathbf{i}+y(t+h)\mathbf{j}+z(t+h)\mathbf{k}]-[x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}
\end{aligned}
$$

**Θεώρημα** (Κανόνες ολοκλήρωσης): Έστω ότι $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$ και $\mathbf{r}_2(t)$ είναι διανυσματικές συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^3$ και $k \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν οι πιο κάτω κανόνες ολοκλήρωσης:

(i) $\displaystyle\int k\mathbf{r}(t)\mathrm{d}t = k\int \mathbf{r}(t)\mathrm{d}t$

(ii) $\displaystyle\int [\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t)]\,\mathrm{d}t = \int \mathbf{r}_1(t)\mathrm{d}t \pm \int \mathbf{r}_2(t)\mathrm{d}t$

**Σημείωση**: Οι πιο πάνω ιδιότητες ισχύουν και για ορισμένα ολοκληρώματα.

Γνωρίζουμε ότι για πραγματικές συναρτήσεις ισχύει

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int f(t)\mathrm{d}t\right] = f(t).$$

Ανάλογα, ισχύει

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int \mathbf{r}(t)\mathrm{d}t\right] = \mathbf{r}(t).$$

Τώρα, αν $\mathbf{R}(t)$ είναι αντιπαράγωγος της $\mathbf{r}(t)$, δηλαδή, $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$, τότε

$$\int \mathbf{r}(t)\mathrm{d}t = \mathbf{R}(t) + \mathbf{c},$$

όπου $\mathbf{c}$ είναι αυθαίρετο σταθερό διάνυσμα. Επίσης ισχύει

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\mathrm{d}t = \mathbf{R}(t)|_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a).$$

**Παράδειγμα**: Δίνεται ότι

$$\mathbf{r}'(t) = \mathrm{e}^{-2t}\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \text{και} \quad r(0) = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Να βρεθεί η $\mathbf{r}(t)$.

**Γεωμετρική ερμηνεία του ορίου**: Αν $\mathbf{r}(t)$ είναι διανυσματική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^3$, τότε

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$$

αν και μόνο αν η διανυσματική ακτίνα $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ προσεγγίζει το διάνυσμα $\mathbf{L}$ και σε μήκος και σε κατεύθυνση όταν $t \to a$.

Λέμε ότι η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ είναι **συνεχής** στο $t_0$ αν $\mathbf{r}(t_0)$ ορίζεται και

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0).$$

Μπορεί να δειχθεί ότι η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ είναι **συνεχής** στο $t_0$ αν και μόνο αν κάθε συνιστώσα συνάρτηση είναι συνεχής.

**Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου**: Υποθέτουμε ότι C είναι η γραφική παράσταση της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ και ότι $\mathbf{r}'(t)$ υπάρχει και είναι μη μηδενική για δοσμένη τιμή της παραμέτρου $t$. Αν το διάνυσμα $\mathbf{r}'(t)$ έχει ως αρχικό σημείο το τελικό σημείο του $\mathbf{r}(t)$, τότε το $\mathbf{r}'(t)$ είναι εφαπτόμενο στη καμπύλη C και δείχνει προς τη κατεύθυνση όπου αυξάνεται η παράμετρος.

Για να εξηγήσουμε καλύτερα την πιο πάνω ερμηνεία, έστω το διάνυσμα $\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)$ για (i) $h > 0$ και (ii) $h< 0$.

Και στις δύο περιπτώσεις η διαφορά $\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)$ συμπίπτει με τη τέμνουσα που ενώνει τα τελικά σημεία των διανυσμάτων $\mathbf{r}(t)$ και $\mathbf{r}(t+h)$. Επειδή $h$ είναι πραγματικός αριθμός, το διάνυσμα

$$\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}$$

επίσης ταυτίζεται με την ίδια τέμνουσα. Παρατηρούμε ότι αν $h<0$, τότε το πιο πάνω διάνυσμα έχει αντίθετη κατεύθυνση με το $\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)$ και αν $h>0$, τότε έχει την ίδια κατεύθυνση. Και στις δύο περιπτώσεις το πιο πάνω διάνυσμα δείχνει στην κατεύθυνση όπου αυξάνεται η παράμετρος. Τώρα, παίρνοντας το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}$$

(υποθέτουμε ότι υπάρχει), τότε οι τέμνουσες που ενώνουν τα τελικά σημεία των διανυσμάτων $\mathbf{r}(t)$ και $\mathbf{r}(t+h)$ τείνουν στην εφαπτομένη στην καμπύλη C. Άρα το διάνυσμα

$$\mathbf{r}'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}$$

είναι εφαπτόμενο στη καμπύλη C στο τελικό σημείο του διανύσματος $\mathbf{r}(t)$ και δείχνει προς τη κατεύθυνση όπου αυξάνεται η παράμετρος.

Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω έχουμε:

**Ορισμός**: ΄Εστω ότι $P$ είναι ένα σημείο της γραφικής παράστασης της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}(t)$ και έστω ότι $\mathbf{r}(t_0)$ είναι η διανυσματική ακτίνα από την αρχή των αξόνων στο $P$.

Αν $\mathbf{r}'(t_0)$ υπάρχει και $\mathbf{r}'(t_0)\neq 0$, τότε καλούμε το $\mathbf{r}'(t_0)$ **εφαπτόμενο διάνυσμα** της γραφικής παράστασης της $\mathbf{r}(t)$ στο $\mathbf{r}(t_0)$. Η ευθεία γραμμή που είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\mathbf{r}'(t_0)$ και διέρχεται από το $P$ καλείται **εφαπτόμενη ευθεία γραμμή** και έχει εξίσωση

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t_0)+t\mathbf{r}'(t_0)$$

**Παράδειγμα**: Να βρεθεί η εφαπτομένη της

$$\mathbf{r}(t)=\sin t\mathbf{i}+\cosh t\mathbf{j}+\tan^{-1}t\mathbf{k}$$

στο σημείο $P(0,1,0)$.

**Λύση**:

**Παράγωγος εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου**: Είναι εύκολο να δειχθεί ότι

(i) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)\right] = \mathbf{r}_1(t)\cdot\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{r}_2(t)$

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)\right] = \mathbf{r}_1(t)\times\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{r}_2(t)$

Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη γραμμή σε κύκλο τέμνεται κάθετα με την ακτίνα. Το πιο κάτω θεώρημα γενικεύει αυτό το αποτέλεσμα.

**Θεώρημα**: Αν $\mathbf{r}(t)$ είναι διανυσματική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^3$ και το μέτρο $\|\mathbf{r}(t)\|$ είναι σταθερό για κάθε τιμή της παραμέτρου $t$, τότε

$$\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t) = 0.$$

Δηλαδή τα διανύσματα $\mathbf{r}(t)$ και $\mathbf{r}'(t)$ είναι ορθογώνια $\forall t$.

**Απόδειξη**:

**Παράδειγμα**: Να υπολογιστεί $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|\mathbf{r}\|\right]$.

## 2.3 Αλλαγή παραμέτρου - Μήκος τόξου

Λέμε ότι $\mathbf{r}(t)$ είναι **παραμετρικά ομαλή** ή ότι είναι **ομαλή συνάρτηση** του $t$ αν η $\mathbf{r}'(t)$ είναι συνεχής και $\mathbf{r}'(t) \neq 0\ \forall t$. Άρα στον $\mathbb{R}^3$, η διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

είναι ομαλή συνάρτηση του $t$ αν οι πραγματικές συναρτήσεις $x'(t),\ y'(t)$ και $z\prime(t)$ είναι συνεχείς και δεν υπάρχει τιμή της παραμέτρου $t$ για την οποία να μηδενίζονται όλες οι παραγώγοι.

**Αλλαγή της παραμέτρου**: Η αλλαγή της παραμέτρου σε μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ είναι μια αντικατάσταση $t = f(\tau)$ η οποία δίνει μια νέα διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(f(\tau))$.

**Θεώρημα** (Κανόνας αλυσίδας): Έστω ότι $\mathbf{r}(t)$ είναι διανυσματική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^3$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως προς $t$. Αν $t = f(\tau)$ είναι μια αλλαγή της παραμέτρου στην οποία η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη ως προς $\tau$, τότε η $\mathbf{r}(f(\tau))$ είναι παραγωγίσιμη ως προς $\tau$ και

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau}.$$

Αν $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau}$ είναι συνεχής και διαφορετική του μηδενός και η $\mathbf{r}(t)$ είναι ομαλή, τότε η $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau}$ είναι συνεχής και μη-μηδενική. Σε αυτή τη περίπτωση λέμε ότι έχουμε **ομαλή αλλαγή της παραμέτρου**.

Ομαλή αλλαγή για την οποία $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} > 0\ \forall\tau$ καλείται **θετική αλλαγή της παραμέτρου** και όταν $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} < 0\ \forall\tau$ καλείται **αρνητική αλλαγή της παραμέτρου**.

**Μήκος τόξου**: Γνωρίζουμε από τις εφαρμογές των ολοκληρωμάτων ότι το μήκος τόξου καμπύλης που ορίζεται παραμετρικά, δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t.$$

Ανάλογα στον $\mathbb{R}^3$, μια καμπύλη που ορίζεται παραμετρικά

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t),\quad a \leq t \leq b$$

έχει μήκος τόξου

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t.$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$L = \int_a^b \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\| \mathrm{d}t.$$

**Παράδειγμα**: Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης

$$\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{2}\sqrt{6}t^2\mathbf{k}, \quad 1< t< 3.$$

**Λύση**:

**Μήκος τόξου ως παράμετρος**: Αρκετές φορές είναι βοηθητικό να χρησιμοποιούμε το μήκος τόξου, $s$, ως παράμετρο. Αυτό μπορεί να γίνει ως ακολούθως:

(i) Επιλέγουμε ένα αυθαίρετο σημείο της καμπύλης ως **σημείο αναφοράς**.

(ii) Αρχίζοντας από το σημείο αναφοράς, επιλέγουμε μια κατεύθυνση κατά μήκος της καμπύλης ως θετική και την άλλη ως αρνητική.

Άρα στον $\mathbb{R}^3$ έχουμε

$$P(x(s), y(s), z(s)).$$

**Παράδειγμα**: Έστω ο κύκλος $x^2 + y^2 = a^2$, ο οποίος παραμετρικά γράφεται

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t.$$

Χρησιμοποιώντας ως σημείο αναφοράς το σημείο $(a, 0)$, να γίνει αλλαγή της παραμέτρου $t$ σε $s$.

**Λύση**:

Συνήθως η διαδικασία αλλαγής της παραμέτρου σε $s$, δεν είναι τόσο απλή όπως στο πιο πάνω παράδειγμα. Το πιο κάτω θεώρημα μας δίνει μια γενική μέθοδο για να γίνει αυτή η διαδικασία αλλαγής.

**Θεώρημα**: Έστω $C$ η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}(t)$ και έστω $\mathbf{r}(t_0)$ είναι ένα σημείο της $C$. Τότε ο πιο κάτω τύπος ορίζει μια θετική αλλαγή της παραμέτρου $t$ σε $s$, όπου $\mathbf{r}(t_0)$ είναι το σημείο αναφοράς.

$$s = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u} \right\| \mathrm{d}u.$$

**Παράδειγμα**: Να γίνει αλλαγή της παραμέτρου από $t$ σε $s$ της ευθείας

$$x = 2t + 1, \quad y = 3t - 2, \quad z = t + 1$$

η οποία έχει ως σημείο αναφοράς το (1,-2,1).

**Λύση**:

**Θεώρημα**: Αν $\mathbf{r}(t)$ είναι παραγωγίσιμη διανυσματική συνάρτηση και $s$ είναι μια παράμετρος μήκου τόξου, τότε

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} \right\| = 1, \quad \forall s.$$

**Απόδειξη**:

## 2.4 Μοναδιαία εφαπτόμενα και κάθετα διανύσματα

Έχουμε δει ότι αν $\mathbf{r}(t)$ είναι παραγωγίσιμη διανυσματική συνάρτηση, τότε το διάνυσμα $\mathbf{r}'(t)$ είναι εφαπτόμενο της καμπύλης $\mathbf{r}(t)$. Αν $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, τότε το διάνυσμα

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

καλείται **μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα**.

Έχουμε δει σε προηγούμενο θεώρημα ότι αν $\|\mathbf{r}(t)\|$=σταθερό, τότε $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$. Δηλαδή, το διάνυσμα $\mathbf{r}(t)$ είναι κάθετο πάνω στο $\mathbf{r}'(t)$. Άρα αφού

$$\|\mathbf{T}(t)\| = 1$$

το διάνυσμα $\mathbf{T}'(t)$ είναι κάθετο πάνω στο $\mathbf{T}(t)$. Αν $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$, ορίζουμε ως **μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα**, το

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}.$$

Τώρα, στη περίπτωση όπου η καμπύλη εκφραστεί ως προς τη παράμετρο $s$ (μήκος τόξου), τα εφαπτόμενα διανύσματα έχουν μήκος ίσο με 1 (προηγούμενο θεώρημα). Επειδή

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\|} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

από την απόδειξη του προηγούμενο θεωρήματος, έχουμε

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s).$$

Επίσης βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|}.$$

Ορίζουμε το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{B}(t)$ ως

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t).$$

**Παράδειγμα**: Έστω

$$\mathbf{r}(t) = 3\sin t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}.$$

Να βρεθούν: $\mathbf{T}(t),\ \mathbf{N}(t)$ και $\mathbf{B}(t)$.

**Λύση**:

## 2.5 Καμπυλότητα

**Ορισμός**: Αν $C$ είναι μια ομαλή καμπύλη (η διανυσματική συνάρτηση η οποία την περιγράφει είναι ομαλή) στον $\mathbb{R}^3$ και αν $s$ είναι μια παράμετρος μήκους τόξου της $C$, τότε η **καμπυλότητα** ορίζεται ως

$$\kappa = \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \right\|.$$

**Παράδειγμα**: Σε προηγούμενο παράδειγμα έχουμε δει ότι ο κύκλος γράφεται παραμετρικά συναρτήσει της παραμέτρου $s$,

$$\mathbf{r}(s) = a\cos\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} + a\sin\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{j}, \quad 0 \le s \le 2\pi a.$$

Επειδή

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s) \Rightarrow \mathbf{T}'(s) = \mathbf{r}''(s) \Rightarrow$$

$$\mathbf{T}'(s) = -\frac{1}{a}\left[\cos\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{s}{a}\right)\mathbf{j}\right]$$

Άρα

$$\kappa = \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \right\| = \frac{1}{a}.$$

Δηλαδή, ο κύκλος έχει σταθερή καμπυλότητα, $\frac{1}{a}$.

Στις πιο απλές περιπτώσεις η καμπύλη ορίζεται συναρτήσει της παραμέτρου $t$ και επομένως χρειαζόμαστε κάποιο τύπο για την καμπυλότητα συναρτήσει του $t$.

**Θεώρημα**: Αν $\mathbf{r}(t)$ είναι μια ομαλή διανυσματική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^3$, τότε για κάθε τιμή της παραμέτρου $t$, για την οποία $\mathbf{T}'(t)$ και $\mathbf{r}''(t)$ υπάρχουν, η καμπυλότητα $\kappa$ μπορεί να εκφραστεί ως

(i) $\kappa = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$

(ii) $\kappa = \dfrac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

**Απόδειξη**:

**Παράδειγμα**: Έστω η διανυσματική εξίσωση

$$\mathbf{r} = 2\cos t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

η οποία παριστάνει μια έλλειψη. Να βρεθεί η καμπυλότητα της έλλειψης στα άκρα των αξόνων.

**Λύση**:

Έχουμε δει ότι ο κύκλος έχει καμπυλότητα ίση με $\frac{1}{a}$, όπου $a$ είναι η ακτίνα του κύκλου. Άρα στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορούμε να πούμε ότι η καμπυλότητα της έλλειψης στα άκρα του μικρού άξονα είναι ίση με αυτή ενός κύκλου με ακτίνα $\frac{9}{2}$

και η καμπυλότητα στα άκρα του μεγάλου άξονα είναι ίση με αυτή ενός κύκλου με ακτίνα $\frac{4}{3}$.

Γενικά, αν μια καμπύλη $C$ στο 2-διάστατο χώρο έχει μη-μηδενική καμπυλότητα, σε ένα σημείο $P$, τότε υπάρχει κύκλος με ακτίνα $\rho = \frac{1}{\kappa}$ (δηλαδή, έχουν την ίδια καμπυλότητα στο $P$) που έχει κοινή εφαπτομένη με τη καμπύλη $C$ στο $P$ και το κέντρο του βρίσκεται στην κοίλη πλευρά της $C$. Η ποσότητα $\rho = \frac{1}{\kappa}$ καλείται **ακτίνα καμπυλότητας**.

Έχουμε δει ότι

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}}{\left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \right\|}$$

και ότι

$$\kappa = \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \right\|.$$

Άρα

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa \mathbf{N}(s).$$

Μπορούμε να γράψουμε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{T}$ συναρτήσει της γωνίας $\phi$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δηλαδή,

$$\mathbf{T} = \cos\phi \mathbf{i} + \sin\phi \mathbf{j}.$$

Παραγωγίζουμε ως προς $\phi$,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}\phi} = -\sin\phi \mathbf{i} + \cos\phi \mathbf{j}.$$

Από τον κανόνα αλυσίδας,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}\phi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}$$

και επομένως

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \right\| = \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}\phi} \right\| \left| \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} \right| = \left| \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} \right| \sqrt{(-\sin\phi)^2 + (\cos\phi)^2} = \left| \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} \right|.$$

Άρα

$$\kappa = \left| \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} \right|.$$

Δηλαδή, η καμπυλότητα μπορεί να θεωρηθεί και ως η απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της γωνίας $\phi$ ως προς $s$.

Για παράδειγμα, από το σχήμα παρατηρούμε ότι η ευθεία έχει καμπυλότητα ίση με μηδέν.

## 2.6 Κίνηση κατά μήκος μιας καμπύλης

Η ταχύτητα ενός σωματιδίου ορίζεται ως

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathbf{T}(t).$$

Τώρα, έχουμε δει ότι

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \quad \text{και} \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\mathbf{r}'(t)\|.$$

Άρα

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t).$$

Δηλαδή, η ταχύτητα είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής του διανύσματος θέσης ως προς το χρόνο $t$. Επίσης η επιτάχυνση είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας ως προς το χρόνο $t$. Έτσι έχουμε:

**Ορισμός**: Αν ένα αντικείμενο κινείται κατά μήκος μιας καμπύλης $C$ έτσι ώστε να έχει διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t)$ τη χρονική στιγμή $t$, τότε η **στιγμιαία ταχύτητα** ορίζεται ως

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

και η **στιγμιαία επιτάχυνση** ορίζεται ως

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}.$$

**Παράδειγμα**: Ένα αντικείμενο κινείται με ταχύτητα

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

τη χρονική στιγμή $t$. Κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, το αντικείμενο είχε συντεταγμένες $(-1, 2, 4)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του αντικειμένου όταν $t = 1$.

**Λύση**:

**Θεώρημα**: Η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός αντικειμένου που κινείται πάνω σε μια καμπύλη μπορούν να εκφραστούν και ως

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathbf{T}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{T} + \kappa \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathbf{N},$$

όπου $s$ είναι παράμετρος μήκους τόξου, $\mathbf{T}$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα, $\mathbf{N}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα και $\kappa$ είναι η καμπυλότητα.

**Απόδειξη**:

Η $\mathbf{a}_T = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{T}$ καλείται **εφαπτομενική επιτάχυνση** και η $\mathbf{a}_N = \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathbf{N}$ καλείται **κάθετη επιτάχυνση**.

Έστω $\theta$ η γωνία μεταξύ $\mathbf{a}$ και $\mathbf{a}_T$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τότε,

$$\|\mathbf{a}_T\| = \|\mathbf{a}\|\cos\theta, \quad \|\mathbf{a}_N\| = \|\mathbf{a}\|\sin\theta \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{a}_T\| = \frac{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{a}\|\cos\theta}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \|\mathbf{a}_N\| = \frac{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{a}\|\sin\theta}{\|\mathbf{v}\|} \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{a}_T\| = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \|\mathbf{a}_N\| = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

**Παράδειγμα**: Να δειχθεί ότι

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3}.$$

**Λύση**:

**Παράδειγμα**: Ένα σωματίδιο κινείται πάνω σε μια καμπύλη και το διάνυσμα θέσης τη χρονική στιγμή $t$ είναι ίσο με

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}.$$

Να βρεθούν:

(i) το μέτρο της εφαπτομενικής και της κάθετης επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή $t$,

(ii) το μέτρο της εφαπτομενικής και της κάθετης επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή $t = 1$,

(iii) η εφαπτομενική και η κάθετη επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t = 1$,

(iv) η καμπυλότητα στο σημείο στο οποίο βρίσκεται το σωματίδιο τη χρονική στιγμή $t = 1$.

**Λύση**:

**Βολή**: Ένα σωματίδιο μάζας $m$ εκτοξεύεται από γνωστό σημείο με γνωστή ταχύτητα. Θέλουμε να βρούμε τη τροχιά της κίνησης.

Θα κάνουμε τρεις υποθέσεις:

(i) Η μάζα του σωματιδίου είναι σταθερή.

(ii) Η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω στο σωματίδιο είναι η δύναμη που οφείλεται στη βαρύτητα της γης (βάρος του σωματιδίου).

(iii) Το σωματίδιο κατά την κίνηση του, βρίσκεται αρκετά κοντά στη Γη έτσι ώστε να υποθέσουμε ότι η βαρύτητα της γης είναι σταθερή.

Θα χρησιμοποιήσουμε το δεύτερο νόμο του Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

όπου $\mathbf{F}$ είναι η δύναμη που ασκείται πάνω στο σωματίδιο, $\mathbf{a}$ είναι η επιτάχυνση του και $m$ είναι η μάζα του.

Έστω ότι το σωματίδιο εκτοξεύεται από το σημείο που έχει διάνυσμα θέσης, $\mathbf{r}_0 = h\mathbf{j}$ και με αρχική ταχύτητα $\mathbf{v}_0$ που σχηματίζει γωνία $\theta$ με την οριζόντια. Η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω στο σωματίδιο είναι το βάρος του. Άρα

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j},$$

όπου $g$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και $g \approx 32$ ft/sec$^2 \approx 9.8$ m/sec$^2$. Επομένως από το δεύτερο νόμο του Newton, βρίσκουμε

$$m\mathbf{a} = -mg\mathbf{j} \Rightarrow$$

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{j}$$

ή

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -g\mathbf{j}.$$

Ολοκληρώνουμε

$$\mathbf{v}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{c}_1,$$

όπου $\mathbf{c}_1$ είναι σταθερό διάνυσμα. Όταν $t = 0$, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 = v_0 \cos\theta \mathbf{i} + v_0 \sin\theta \mathbf{j}$ ($v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$). Άρα

$$\mathbf{c}_1 = v_0 \cos\theta \mathbf{i} + v_0 \sin\theta \mathbf{j}$$

και επομένως

$$\mathbf{v}(t) = v_0 \cos\theta \mathbf{i} + (v_0 \sin\theta - gt)\mathbf{j}$$

ή

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = v_0 \cos\theta \mathbf{i} + (v_0 \sin\theta - gt)\mathbf{j}$$

Ολοκληρώνουμε

$$\mathbf{r}(t) = v_0 t \cos\theta \mathbf{i} + (v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2)\mathbf{j} + \mathbf{c}_2.$$

Όταν $t = 0$, $\mathbf{r} = h\mathbf{j}$. Άρα $\mathbf{c}_2 = h\mathbf{j}$ και επομένως

$$\mathbf{r}(t) = v_0 t \cos\theta \mathbf{i} + (h + v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2)\mathbf{j},$$

το οποίο είναι το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Αν θέσουμε $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, τότε

$$x = v_0 t \cos\theta, \quad y = h + v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2.$$

Απαλείφουμε το $t$ από αυτές τις δύο εξισώσεις, για να βρούμε

$$y = h + (\tan\theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}\right) x^2$$

η οποία είναι εξίσωση παραβολής και είναι η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου.

**Παράδειγμα**: Ένα σωματίδιο εκτοξεύεται από σημείο που βρίσκεται στο έδαφος με αρχική ταχύτητα 60 m/sec που σχηματίζει γωνία $30^o$ με την οριζόντια. Να βρεθούν:

(i) ο χρόνος που χρειάστηκε το σωματίδιο για να φθάσει στο μέγιστο ύψος,

(ii) το μέγιστο ύψος,

(iii) ο χρόνος που χρειάζεται το σωματίδιο για να επιστρέψει στο έδαφος,

(iv) η οριζόντια απόσταση που διάνυσαι το σωματίδιο.

[$g = 10$ m/sec$^2$ ]

**Λύση**:

## 2.7 Οι νόμοι του Kepler

Οι νόμοι του Kepler αναφέρονται στη κίνηση των πλανητών.

**Πρώτος νόμος (Νόμος των τροχιών)**: Κάθε πλανήτης κινείται σε ελλειπτική τροχιά έχοντας τον ήλιο ως μια εστία.

**Δεύτερος νόμος (Νόμος των εμβαδών)**: Το διάνυσμα θέσης του πλανήτη (ως προς τον ήλιο) σαρώνει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους.

**Τρίτος νόμος (Νόμος των περιόδων)**: Το τετράγωνο της περιόδου ενός πλανήτη (ο χρόνος που χρειάζεται ο πλανήτης για μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον ήλιο) είναι ανάλογο με τον κύβο του μήκους του μεγάλου ημιάξονα της έλλειψης.

**Κεντρικές δυνάμεις**: Υποθέτουμε ότι πάνω στο πλανήτη ασκείται μια δύναμη που έχει κατεύθυνση από τον πλανήτη προς τον ήλιο. Γενικά, μια δύναμη που έχει κατεύθυνση προς σταθερό σημείο, καλείται **κεντρική δύναμη**.

Έστω ότι ένα σωματίδιο κινείται κάτω από την επίδραση μιας κεντρικής δύναμης $\mathbf{F}$. Από τον δεύτερο νόμο του Newton, έχουμε

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Άρα η επιτάχυνση $\mathbf{a}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με την $\mathbf{F}$ και επομένως $\mathbf{a}$ και $\mathbf{r}$ είναι αντίθετα διανύσματα. Συνεπώς

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Τώρα,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Άρα

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{b},$$

όπου $\mathbf{b}$ είναι σταθερό διάνυσμα. Αυτό μας δείχνει ότι το $\mathbf{r}$ είναι κάθετο σε σταθερό διάνυσμα $\mathbf{b}$. Επομένως το σωματίδιο κινείται σε επίπεδο που έχει ως κάθετο διάνυσμα το σταθερό διάνυσμα $\mathbf{b}$. Άρα κάθε σωματίδιο στο οποίο ασκείται κεντρική δύναμη, κινείται σε επίπεδο.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τους νόμους του Kepler.

**Δεύτερος νόμος του Kepler**

Έστω ότι η κίνηση γίνεται στο $xy$-επίπεδο και επομένως το σταθερό διάνυσμα $\mathbf{b}$ είναι κατά μήκος του άξονα $z$. Γράφουμε

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u},$$

όπου $r = \|\mathbf{r}\|$ και $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του $\mathbf{r}$. Έχουμε

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\mathbf{u}) = r\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}.$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} = \mathbf{r}\times\mathbf{v} &= r\mathbf{u}\times\left(r\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}\right) \\
&= r^2\mathbf{u}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}\times\mathbf{u} \\
&= r^2\mathbf{u}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

Από τον κανόνα αλυσίδας,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = (-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j})\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

και επομένως

$$\mathbf{u}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = (\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j})\times(-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j})\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}$$

Άρα

$$\mathbf{b} = r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}$$

και επειδή $\mathbf{b}$ είναι σταθερό διάνυσμα, έχουμε

$$r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \text{σταθερά}$$

Έστω ότι η τροχιά του $P$ περιγράφεται σε πολικές συντεταγμένες. Δηλαδή,

$$r = f(\theta).$$

Τότε το εμβαδόν που σαρώνει το διάνυσμα θέσης από μια αρχική θέση $\theta_0$ μέχρι μια γενική θέση $\theta$ είναι ίσο με

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta}[f(\phi)]^2\,\mathrm{d}\phi.$$

Άρα

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}\left[f(\theta)\right]^2.$$

Τώρα, από τον κανόνα αλυσίδας

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left[f(\theta)\right]^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

Άρα, αφού $r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ =σταθερά,

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \text{σταθερά}$$

Επομένως το εμβαδόν σαρώνεται με σταθερό ρυθμό.

**Πρώτος νόμος του Kepler**: Σύμφωνα με το **νόμο της παγκόσμιας έλξης** ένα σωματίδιο μάζας $m_1$ έλκει ένα άλλο σωματίδιο μάζας $m_2$ που βρίσκεται σε απόσταση $r$, με μια δύναμη

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\mathbf{u},$$

όπου $\mathbf{u}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα από το πρώτο προς το δεύτερο σωματίδιο και $G$ είναι μια σταθερά που καλείται **παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας**. Άρα η κεντρική δύναμη που ασκείται από τον ήλιο πάνω στον πλανήτη είναι ίση με

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{r^2}\mathbf{u},$$

όπου $m$ είναι η μάζα του πλανήτη και $M$ είναι η μάζα του ήλιου. Επομένως από τον δεύτερο νόμο του Newton, έχουμε

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{u}$$

Έστω όταν $t = 0$,

$$\mathbf{r} = r_0\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = v_0\mathbf{j}.$$

Τώρα, όταν $t = 0$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}\times\mathbf{v} = r_0\mathbf{i}\times v_0\mathbf{j} = r_0v_0\mathbf{k}$$

και από προηγουμένως $\mathbf{b} = r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}$. Άρα

$$r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r_0 v_0.$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= -\frac{GM}{r^2}\mathbf{u}\times r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathbf{k} \\
&= -GM\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(\cos\theta\mathbf{i}+\sin\theta\mathbf{j})\times\mathbf{k} \\
&= GM(-\sin\theta\mathbf{i}+\cos\theta\mathbf{j})\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\
&= GM\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = GM\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

Άρα

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = GM\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}$$

Τώρα,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}\times\mathbf{b}) = \mathbf{v}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}+\mathbf{a}\times\mathbf{b} = GM\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}$$

Ολοκληρώνουμε

$$\mathbf{v}\times\mathbf{b} = GM\mathbf{u}+\mathbf{c},$$

όπου $\mathbf{c}$ είναι σταθερό διάνυσμα. Όταν $t=0$, $\mathbf{v}=v_0\mathbf{j},\ \mathbf{u}=\mathbf{i}$ και $\mathbf{b}r_0v_0\mathbf{k}$. Άρα

$$\mathbf{c} = (r_0v_0^2 - GM)\mathbf{i}$$

και επομένως

$$\mathbf{v}\times\mathbf{b} = GM\mathbf{u}+(r_0v_0^2 - GM)\mathbf{i}$$

Παίρνουμε εσωτερικό γινόμενο με το διάνυσμα $\mathbf{r}=r\mathbf{u}$, για να βρούμε,

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{b}) = GM\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}+(r_0v_0^2-GM)\mathbf{r}\cdot\mathbf{i}\Rightarrow$$

$$(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{b} = GMr\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+(r_0v_0^2-GM)r\mathbf{u}\cdot\mathbf{i}\Rightarrow$$

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = GMr+(r_0v_0^2-GM)r\cos\theta,$$

επειδή $\mathbf{v}\times\mathbf{v}=\mathbf{b},\ \mathbf{u}\dot{\mathbf{u}}=\|\mathbf{u}\|^2=1,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{i}=\cos\theta$.

Τώρα, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=\|\mathbf{b}\|^2=r_0^2v_0^2$ και επομένως

$$r_0^2v_0^2 = GMr+(r_0v_0^2-GM)r\cos\theta.$$

Λύνουμε ως προς $r$,

$$r = \frac{r_0^2 v_0^2}{GM + (r_0 v_0^2 - GM)\cos\theta} = \frac{\frac{r_0^2 v_0^2}{GM}}{1 + \left(\frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1\right)\cos\theta} \Rightarrow$$

$$r = \frac{d}{1 + \epsilon \cos\theta},$$

όπου

$$d = \frac{r_0^2 v_0^2}{GM}, \quad \text{και} \quad \epsilon = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1.$$

Η πιο πάνω εξίσωση είναι η εξίσωση της κωνικής τομής. Η σταθερά $\epsilon$ καλείται **εκκεντρότητα**.

Αν $\epsilon = 0$, τότε η κωνική τομή είναι κύκλος. Αν $0 < \epsilon < 1$ είναι έλλειψη, αν $\epsilon = 1$ είναι παραβολή και αν $\epsilon > 1$, τότε είναι υπερβολή.

**Τρίτος νόμος του Kepler**

Έστω ότι $a$ είναι ο μεγάλος ημιάξονας και $b$ είναι ο μικρός ημιάξονας. Το εμβαδόν της έλλειψης είναι ίσο με $\pi ab$ και από το δεύτερο νόμο του Kepler βρίσκουμε

$$\pi ab = \frac{1}{2} r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} T,$$

όπου $T$ είναι ο χρόνος που χρειάζεται ένας πλανήτης για μια πλήρη περιστροφή. Τώρα, $r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r_0 v_0$ και επομένως

$$\pi ab = \frac{1}{2} r_0 v_0 T.$$

Όταν $\theta = 0$, έχουμε την ελάχιστη απόσταση του πλανήτη από τον ήλιο και όταν $\theta = \pi$ έχουμε τη μέγιστη απόσταση. Άρα

$$r_{min} = \frac{d}{1+\epsilon}, \quad r_{max} = \frac{d}{1-\epsilon}.$$

Τώρα,

$$2a = r_{min} + r_{max} = \frac{d}{1+\epsilon} + \frac{d}{1-\epsilon} = \frac{2d}{1-\epsilon^2} \Rightarrow$$

$$a = \frac{d}{1-\epsilon^2}$$

Για την έλλειψη ισχύει

$$b^2 = a^2(1-\epsilon^2)$$

και επομένως

$$b^2 = a^2\frac{d}{a} = ad = \frac{ar_0^2v_0^2}{GM}.$$

Από πιο πάνω

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{r_0^2 v_0^2} = \frac{4\pi^2 a^2 \frac{ar_0^2v_0^2}{GM}}{r_0^2 v_0^2} = \frac{4\pi^2}{GM}a^3 \Rightarrow$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Άρα ο λόγος $\frac{T^2}{a^3}$ είναι σταθερός.