Κεφάλαιο 1

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1.1 Καρτεσιανές συντεταγμένες στο 3-διάστατο χώρο

Έστω η τριάδα

$$(a, b, c).$$

Το σύνολο των τριάδων καλείται 3-διάστατος χώρος και συμβολίζεται με $\mathbb{R}^3$. Ειδικότερα η τριάδα (a, b, c) ορίζει ένα σημείο ή ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^3$.

Οι άξονες Ox, Oy, Oz αποτελούν ένα 3-διάστατο **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων** και καλούνται **άξονες συντεταγμένων**. Έστω

$$P(a, b, c).$$

Οι πραγματικοί αριθμοί a, b, c καλούνται **καρτεσιανές συντεταγμένες** του σημείου P. Ο αριθμός a καλείται $x-$συντεταγμένη, ο b καλείται $y-$συντεταγμένη και ο c καλείται $z-$συντεταγμένη. Οι άξονες συντεταγμένων ορίζουν 3 **επίπεδα συντεταγμένων**, το xy-επίπεδο, το xz-επίπεδο και το yz-επίπεδο.

Τώρα, η $x-$συντεταγμένη ενός σημείου P είναι η απόσταση του σημείου P από το yz-επίπεδο, η $y-$συντεταγμένη είναι η απόσταση από το xz-επίπεδο και η $z-$συντεταγμένη από το xy-επίπεδο.

Οι άξονες συντεταγμένων χωρίζουν τον 3-διάστατο χώρο σε 8 **οκτημόρια**. Για παράδειγμα, τα σημεία που έχουν και τις τρεις συντεταγμένες θετικές, βρίσκονται στο πρώτο οκτημόριο.

Απόσταση σημείου από σημείο

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι η απόσταση του σημείου P από την αρχή των αξόνων O, είναι ίση με

$$\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+c^2}.$$

Άρα

$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Ανάλογα, η απόσταση του σημείου $P_1(x_1,y_1,z_1)$ από το σημείο $P_2(x_2,y_2,z_2)$ είναι ίση με

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Μέσο ευθύγραμμου τμήματος: Οι συντεταγμένες του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $P_1(x_1,y_1,z_1)$ και $P_2(x_2,y_2,z_2)$ ορίζονται ως

$$\left(\frac{1}{2}(x_1+y_1),\frac{1}{2}(y_1+y_2),\frac{1}{2}(z_1+z_2)\right).$$

Εξίσωση της σφαίρας: Στο 2-διάστατο χώρο το σύνολο των σημείων (x,y) τα οποία ικανοποιούν μια εξίσωση, συνήθως είναι μια καμπύλη στο xy-επίπεδο. Ανάλογα, στο 3-διάστατο χώρο το συνόλο των σημείων (x,y,z) είναι συνήθως μια επιφάνεια στο xyz σύστημα συντεταγμένων. Για παράδειγμα, το σύνολο των σημείων (x,y,z) των οποίων η απόσταση από σταθερό σημείο είναι σταθερή, ορίζουν μια σφαίρα. Δηλαδή,

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=r$$

ή ισοδύναμα

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

είναι η εξίσωση της σφαίρας (συνήθης μορφή) με κέντρο (x_0, y_0, z_0) και ακτίνα r.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου και η ακτίνα της σφαίρας

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 8z + 1 = 0.$$

Λύση:

Θεώρημα: Μια εξίσωση της μορφής

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

αντιπροσωπεύει μια σφαίρα ή ένα σημείο ή δεν έχει γραφική παράσταση.

Απόδειξη:

Κυλινδρικές επιφάνειες: Μια εξίσωση που περιέχει μόνο δύο από τις τρεις μεταβλητές $x,\ y$ και z αντιπροσωπεύει μια **κυλινδρική επιφάνεια** στο 3-διάστατο χώρο. Αυτή η επιφάνεια προκύπτει με προέκταση της 2-διάστατης γραφικής παράστασης (συναρτήσει των δύο μεταβλητών) παράλληλα με τον άξονα της τρίτης μεταβλητής.

Παράδειγμα: Να γίνει η γραφική παράσταση της

$$x^2 + z^2 = 1$$

στο 3-διάστατο χώρο.

Παράδειγμα: Να γίνει η γραφική παράσταση της

$$z = \mathrm{e}^y$$

στο 3-διάστατο χώρο.

1.2 Διανύσματα

Εισαγωγή (Γεωμετρική): Σε διάφορες φυσικές εφαρμογές υπάρχουν μεγέθη τα οποία μπορούν να χαρακτηρισθούν μόνο με ένα αριθμό. Τέτοια μεγέθη, όπως για παράδειγμα, η θερμοκρασία ενός σώματος, η μάζα ενός σώματος, η απόσταση μεταξύ δύο σημείων, καλούνται **αριθμητικά** ή **βαθμωτά** ή **μονόμετρα** μεγέθη.

Έστω ότι έχουμε την ευθεία (ϵ) και τα σημεία A και B πάνω στην ευθεία. Η ευθεία (ϵ) έχει την ίδια διεύθυνση με όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες με αυτή. Το ευθύγραμμο τμήμα AB ορίζει ένα **διάνυσμα**, το οποίο συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$ ή με ένα μικρό γράμμα και ένα βέλος, για παράδειγμα, $\overrightarrow{a}$. Επίσης συνηθίζεται και ο συμβολισμός $\mathbf{a}$.

Το σημείο A καλείται **αρχή** του διανύσματος (αρχικό σημείο) και το B καλείται **πέρας** του διανύσματος (τελικό σημείο). Και τα δύο σημεία καλούνται **πέρατα** του διανύσματος.

Για κάθε διάνυσμα διακρίνουμε τα εξής:

(i) τη **διεύθυνση** του, η οποία καθορίζεται από την ευθεία που διέρχεται από τα πέρατα,

(ii) τη **φορά** του, από το αρχικό σημείο στο τελικό σημείο,

(iii) τη **μήκος** του, που είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα πέρατα.

Η διεύθυνση και η φορά του διανύσματος ορίζουν την έννοια της **κατεύθυνσης**. Δηλαδή, κάθε ευθεία έχει δύο κατευθύνσεις.

Δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ καλούνται **ίσα** όταν είναι επί τα αυτά. Δηλαδή, το A συμπίπτει με το C και το B συμπίπτει με το D. Τα διανύσματα για τα οποία ισχύει αυτή η ισότητα καλούνται **εφαρμοστά** ή **δεσμευμένα** διανύσματα.

Δύο παράλληλα διανύσματα καλούνται **ομόρροπα** όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και **αντίρροπα** όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση. Γενικεύοντας την πιο πάνω έννοια της ισότητας, λέμε ότι δύο διανύσματα είναι **ίσα** αν (α) είναι ομόρροπα και (β) έχουν ίσα μήκη. Τα διανύσματα για τα οποία ισχύει αυτή η ισότητα καλούνται **ελεύθερα** διανύσματα.

Διανύσματα που είναι αντίρροπα και έχουν ίσα μήκη καλούνται **αντίθετα** διανύσματα. Συμβολίζουμε το αντίθετο διάνυσμα του $\mathbf{a}$ με $-\mathbf{a}$.

Πρόσθεση διανυσμάτων: Αν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι δύο διανύσματα, τότε το άθροισμα $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ είναι ένα διάνυσμα που προκύπτει ως εξής: Τοποθετούμε το διάνυσμα $\mathbf{b}$ με τέτοιο τρόπο ώστε η αρχή του να ταυτίζεται με το πέρας του $\mathbf{a}$. Το διάνυσμα $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ έχει ως αρχή την αρχή του $\mathbf{a}$ και ως πέρας το πέρας του $\mathbf{b}$.

Διαφορά διανυσμάτων: Αν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι δύο διανύσματα, τότε η διαφορά $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Μηδενικό διάνυσμα: Το διάνυσμα με μήκος ίσο με το μηδέν καλείται **μηδενικό διάνυσμα** και συμβολίζεται με $\mathbf{0}$. Ορίζουμε

$$\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

και

$$\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός: Αν $\mathbf{a}$ είναι ένα μη-μηδενικό διάνυσμα και k είναι μη-μηδενικός πραγματικός αριθμός, τότε το γινόμενο $k\mathbf{a}$ ορίζεται ως το διάνυσμα που έχει μήκος $|k|$ φορές το μήκος του $\mathbf{a}$ και έχει την κατεύθυνση του $\mathbf{a}$ αν $k > 0$ και αντίθετη του $\mathbf{a}$ αν $k< 0$. Επίσης ορίζουμε $k\mathbf{a} = \mathbf{0}$ αν $k = 0$ ή $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$: Έχουμε

Ορίζουμε το μηδενικό διάνυσμα ως $\mathbf{0}(0,0,0)$.

Θεώρημα (Αριθμητικές πράξεις): Αν $\mathbf{a}(a_1,a_2,a_3)$ και $\mathbf{b}(b_1,b_2,b_3)$ είναι δύο διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ και k είναι ένας πραγματικός αριθμός ($k \in \mathbb{R}$), τότε

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)\\
&\mathbf{a}-\mathbf{b} = (a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)\\
&k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)
\end{aligned}$$

Θεώρημα (Διανύσματα με αρχικό σημείο διαφορετικό από την αρχή των αξόνων): Έστω ότι $\overrightarrow{P_1P_2}$ είναι ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^3$ με αρχικό σημείο $P_1(x_1,y_1,z_1)$ και τελικό σημείο $P_2(x_2,y_2,z_2)$, τότε

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).$$

Θεώρημα (Ιδιότητες): Για οποιαδήποτε διανύσματα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ και οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς k και λ, ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις:

(i) $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$

(ii) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

(iii) $\mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{a} = \mathbf{a}$

(iv) $\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

(v) $k(\lambda\mathbf{a}) = (k\lambda)\mathbf{a}$

(vi) $k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$

(vii) $(k+\lambda)\mathbf{a} = k\mathbf{a}+\lambda\mathbf{a}$

(viii) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

Μήκος διανύσματος: Το μήκος του διανύσματος $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ ορίζεται ως

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Σημείωση: Αν $\mathbf{a}$ είναι διάνυσμα και $k \in \mathbb{R}$, τότε

$$\|k\mathbf{a}\| = |k|\|\mathbf{a}\|.$$

Μοναδιαία διανύσματα: Τα διανύσματα με μήκος ίσο με 1 καλούνται **μοναδιαία**.
Στον $\mathbb{R}^3$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των θετικών αξόνων x, y και z συμβολίζονται με $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$, αντίστοιχα. Δηλαδή,

$$\mathbf{i} = (1,0,0), \quad \mathbf{j} = (0,1,0), \quad \mathbf{k} = (0,0,1).$$

Κάθε διάνυσμα στον $\mathbb{R}^3$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3) = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\
&= a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) \\
&= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Τώρα, από τη σχέση

$$\|k\mathbf{a}\| = |k|\|\mathbf{a}\|,$$

αν θέσουμε $k = \dfrac{1}{\|\mathbf{a}\|}$, βρίσκουμε

$$\left\|\frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a}\right\| = \left|\frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\right| \|\mathbf{a}\| = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\|\mathbf{a}\| = 1.$$

Άρα διαίρωντας ένα διάνυσμα με το μέτρο του, προκύπτει ένα μοναδιαίο διάνυσμα. Η διαδικασία αυτή καλείται **κανονικοποίηση** του διανύσματος.

Παράδειγμα: Να κανονικοποιηθεί το διάνυσμα $\mathbf{a}(1,2,3)$.

1.3 Εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός: Αν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ και θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ είναι η γωνία μεταξύ τους, τότε το (Ευκλείδειο) **εσωτερικό γινόμενο** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ορίζεται ως

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta$$

Σημειώσεις: **1**. Αν $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ή $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, τότε $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

2. Από τον πιο πάνω ορισμό προκύπτει η σχέση

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

η οποία προσδιορίζει τη γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων.

Έστω τα μη-μηδενικά διανύσματα $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ και $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ όπως φαίνονται στο πιο πάνω σχήμα. Από τον νόμο των συνημιτόνων προκύπτει

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta.$$

Επειδή $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, βρίσκουμε

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta \Rightarrow$$

$$\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2\right) \Rightarrow$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2\right)$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}\|^2 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ \|\mathbf{b}\|^2 &= b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \\ \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 &= (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε για να βρούμε

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Παρατηρούμε ότι ο πιο πάνω τύπος ισχύει και όταν $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ή $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Θεώρημα: Αν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι μη-μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ και αν θ είναι η γωνία μεταξύ τους, τότε

(i) η θ είναι οξεία αν και μόνο αν $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} > 0$

(ii) η θ είναι αμβλεία αν και μόνο αν $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$

(iii) $\theta = \frac{\pi}{2}$ αν και μόνο αν $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

Απόδειξη: Εύκολα από τη σχέση $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}$.

Σημείωση: Όταν ισχύει η περίπτωση (iii) του πιο πάνω θεωρήματος, τότε λέμε ότι τα διανύσματα είναι **ορθογώνια**.

Ορισμός: Οι γωνίες α, β, γ οι οποίες σχηματίζει ένα διάνυσμα $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ με τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ καλούνται **γωνίες κατεύθυνσης**. Τα αντίστοιχα συνημίτονα $\cos\alpha$, $\cos\beta$ και $\cos\gamma$ καλούνται **συνημίτονα κατεύθυνσης**.

Τώρα, χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}$$

έχουμε:

Θεώρημα: Τα συνημίτονα κατεύθυνσης του μη μηδενικού διανύσματος $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ είναι ίσα με

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Σημείωση: Τα συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ είναι ίσα με τις συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος $\dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$, επειδή

$$\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}\mathrm{i} + \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{j} + \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{k} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}.$$

Θεώρημα: (Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου) Αν $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ και $k \in \mathbb{R}$, τότε

(i) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$

(iii) $k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(k\mathbf{b})$

(iv) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$

Απόδειξη: Άσκηση

Σημείωση: Από το (iv) παρατηρούμε ότι

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

Ορθογώνιες προβολές: Σε αρκετές εφαρμογές χρειάζεται να αναλύσουμε ένα διάνυσμα $\mathbf{a}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, τη πρώτη παράλληλη σε δοσμένο διάνυσμα $\mathbf{b}$ και την άλλη κάθετη στο $\mathbf{b}$.

Όπως φαίνεται στο πιο πάνω σχήμα το διάνυσμα $\mathbf{c}_1$ είναι παράλληλο με το $\mathbf{b}$ και το $\mathbf{c}_2$ είναι κάθετο με το $\mathbf{b}$. Γράφουμε

$$\mathbf{a} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_1 + (\mathbf{a} - \mathbf{c}_1).$$

Το διάνυσμα $\mathbf{c}_1$ καλείται συνιστώσα του $\mathbf{a}$ κατά μήκος του $\mathbf{b}$ και το $\mathbf{c}_2$ καλείται συνιστώσα του $\mathbf{a}$ κάθετα στο $\mathbf{b}$. Επίσης το $\mathbf{c}_1$ καλείται **ορθογώνια προβολή** του $\mathbf{a}$ πάνω στο $\mathbf{b}$ και συμβολίζεται με $\mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$. Δηλαδή,

$$\mathbf{a} = \mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} + (\mathbf{a} - \mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}).$$

Θεώρημα: Αν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ και $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, τότε

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}\mathbf{b}.$$

Απόδειξη:

Παράδειγμα: Δίνονται τα σημεία A(2,1,-3), B(0,2,-1) και P(4,3,0).
(i) Να βρεθεί $\|\text{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AP}\|$
(ii) Να βρεθεί η απόσταση του P από την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B.

Λύση:

Έργο: Γνωρίζουμε ότι το έργο W που παράγει μια σταθερή δύναμη $\mathbf{F}$ με μέτρο $\|\mathbf{F}\|$ η οποία ασκείται στην κατεύθυνση της κίνησης πάνω σε σωματίδιο που κινείται από το P στο Q πάνω σε μια ευθεία γραμμή είναι ίσο με

$$W = (\text{δύναμη}) \times (\text{απόσταση}) = \|\mathbf{F}\|\|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Αν η δύναμη $\mathbf{F}$ είναι σταθερή, αλλά σχηματίζει γωνία θ με την κατεύθυνση της κίνησης

τότε ορίζουμε το έργο ως

$$W = (\|\mathbf{F}\| \cos\theta)\|\overrightarrow{PQ}\| = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}.$$

1.4 Εξωτερικό γινόμενο

Ορίζουσες: Εστω $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε ως 2×2 ορίζουσα τη διάταξη

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Ανάλογα, η 3×3 ορίζουσα ορίζεται ως

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Ορισμός (Εξωτερικό γινόμενο): Αν $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ και $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, τότε το **εξωτερικό γινόμενο** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι το διάνυσμα

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Δηλαδή,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Θεώρημα: Αν $\mathbf{a},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, τότε
(i) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$
(ii) $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$
(iii) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

Σημείωση: Από το (i) και (ii) παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι κάθετο και στο $\mathbf{a}$ και στο $\mathbf{b}$.

Τώρα, αν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, τότε από το προηγούμενο θεώρημα

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta)^2 \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 (1 - \cos^2\theta) \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \sin^2\theta \end{aligned}$$

Άρα

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| |\sin\theta|.$$

Επειδή $0 \le \theta \le \pi$, έχουμε $\sin\theta \ge 0$ και επομένως

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin\theta.$$

Επειδή το εμβαδό του παραλληλογράμμου είναι ίσο με

$$E = (\text{βάση}) \times (\text{ύψος}),$$

έχουμε

$$E = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \sin\theta.$$

Άρα το εμβαδό του παραλληλογράμμου είναι ίσο με

$$E = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|.$$

Παρατηρούμε ότι $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ αν και μόνο αν $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ή $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ή $\sin\theta = 0$ $(\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2})$. Άρα προκύπτει το πιο κάτω θεώρημα:

Θεώρημα: Αν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι μη-μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, τότε $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ αν και μόνο αν το διάνυσμα $\mathbf{a}$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\mathbf{b}$.

Θεώρημα (Ιδιότητες): Αν $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ και $k \in \mathbb{R}$, τότε
(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$
(iii) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(iv) $k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b})$
(v) $\mathbf{a} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
(vi) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{array}$$

Για παράδειγμα,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \mathbf{k}$$

Μεικτό γινόμενο διανυσμάτων: Αν $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3),\ \mathbf{b}(b_1, b_2, b_3),\ \mathbf{c}(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$, τότε ο αριθμός

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

καλείται **μεικτό γινόμενο**, το οποίο υπολογίζεται από τον τύπο

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Θεώρημα: Αν τα διανύσματα $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3)$ έχουν το ίδιο αρχικό σημείο, τότε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο αν και μόνο αν

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0.$$

Σημείωση: Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών μπορεί να δειχθεί ότι

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}).$$

1.5 Παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας γραμμής

Η εξίσωση μιας ευθείας γραμμής μπορεί να υπολογιστεί μοναδικά αν προσδιορίσουμε ένα σημείο της ευθείας και ένα διάνυσμα παράλληλο με την ευθεία.

Θεώρημα: Η ευθεία γραμμή στον $\mathbb{R}^3$ η οποία διέρχεται από το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη με το μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct,$$

όπου t είναι παράμετρος.

Απόδειξη:

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $P_1(5, -2, 1)$ και $P_2(2, 4, 2)$.

Λύση:

Στις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας γραμμής η παράμετρος t παίρνει τις τιμές

$$-\infty < t < +\infty.$$

Αν οι τιμές του t περιοριστούν σε συγκεκριμένο πεπερασμένο διάστημα, τότε έχουμε τις εξισώσεις ευθύγραμμου τμήματος.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $P_1(5, -2, 1)$ και $P_2(2, 4, 2)$.

Λύση:

Τώρα, από την απόδειξη του τύπου των παραμετρικών εξισώσεων της ευθείας έχουμε δει ότι

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} = ta\mathbf{i} + tb\mathbf{j} + tc\mathbf{k} \Rightarrow$$

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}) + t(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_0 &= x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} \\ \mathbf{u} &= a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \end{aligned}$$

οπότε προκύπτει

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{u}$$

η οποία καλείται **διανυσματική εξισωση** της ευθείας.

1.6 Επίπεδα στον $\mathbb{R}^3$

Το επίπεδο που έχει εξίσωση $z = k$ είναι παράλληλο με το xy-επίπεδο και διέρχεται από το σημείο $(0, 0, k)$. Το επίπεδο που έχει εξίσωση $y = k$ είναι παράλληλο με το xz-επίπεδο και διέρχεται από το σημείο $(0, k, 0)$. Το επίπεδο που έχει εξίσωση $x = k$ είναι παράλληλο με το yz-επίπεδο και διέρχεται από το σημείο $(k, 0, 0)$.

Ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ ορίζεται μοναδικά αν προσδιορίσουμε ένα σημείο του επιπέδου και ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο.

Έστω $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ένα σημείο του επιπέδου και $\mathbf{n}(a, b, c)$ ένα κάθετο διάνυσμα του επιπέδου. Τότε το επίπεδο περιέχει το σύνολο των σημείων $P(x, y, z)$ που είναι τέτοια ώστε

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$$

Άρα

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

η οποία είναι η εξίσωση του επιπέδου στον $\mathbb{R}^3$. Παρατηρούμε ότι η πιο πάνω εξίσωση γράφεται

$$ax + by + cz + d = 0$$

η οποία καλείται **γενική εξίσωση** του επιπέδου. Επίσης γράφεται και ως

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n},$$

όπου $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{n}$ είναι η κάθετος στο επίπεδο και $\mathbf{a}$ είναι ένα σημείο του επιπέδου. Αυτή η μορφή καλείται **διανυσματική εξίσωση** του επιπέδου.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(2, 3, 1)$ και $P_3(3, -1, 2)$.

Λύση:

Παράδειγμα: Να βρεθεί το σημείο τομής της ευθείας

$$x = 3 + 8t, \quad y = 4 + 5t, \quad z = -3 - t$$

και του επιπέδου

$$x - 3y + 5z = 12.$$

Λύση:

Η γωνία μεταξύ δύο τεμνόμενων επιπέδων ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζουν τα αντίστοιχα τους κάθετα διανύσματα.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν τα επίπεδα

$$x + 2y - 2z = 5 \quad \text{και} \quad 6x - 3y + 2z = 8.$$

Λύση:

Προβλήματα αποστάσεων: Θεώρημα: Η απόσταση D μεταξύ ενός σημείου $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και του επιπέδου $ax + by + cz + d = 0$ δίνεται από τον τύπον

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Απόδειξη:

Σημείωση: Ο πιο πάνω τύπος είναι επίσης χρήσιμος για τον υπολογισμό της απόστασης δύο παράλληλων επιπέδων και της απόστασης μεταξύ δύο μη-τεμνόμενων ευθειών.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των δύο μη τεμνόμενων ευθειών
L_1: $x = 1 + 7t, \;\; y = 3 + t, \;\; z = 5 - 3t$
L_2: $x = 4 - t, \;\; y = 6, \;\; z = 7 + 2t$

Λύση:

1.7 Κυλινδρικές - σφαιρικές συντεταγμένες

Στον $\mathbb{R}^3$ για να προσδιοριστεί η θέση ενός σημείου χρειάζονται 3 πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι καλούνται **συντεταγμένες**.

Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z)

Κυλινδρικές συντεταγμένες $(r, \theta, z),\ r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$

Η επιφάνεια z =σταθερά παριστάνει ένα οριζόντιο επίπεδο. Η επιφάνεια r =σταθερά παριστάνει ένα ορθο-κυκλικό κύλινδρο. Η επιφάνεια θ =σταθερά παριστάνει ένα ημι-επίπεδο κάθετο στο xy-επίπεδο.

Σφαιρικές συντεταγμένες $(\rho, \theta, \phi),\ \rho \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi$

Η επιφάνεια ρ =σταθερά $= \rho_0$ παριστάνει μια σφαίρα ακτίνας ρ_0. Η επιφάνεια ϕ =σταθερά $= \phi_0$ παριστάνει ένα ορθο-κυκλικό κώνο.

Εξισώσεις μετασχηματισμού

$(r, \theta, z) \rightarrow (x, y, z)$: $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$

$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, z)$: $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = \dfrac{y}{x}, \quad z = z$

$(\rho, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$: $x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi$

$(x, y, z) \rightarrow (\rho, \theta, \phi)$: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan\theta = \dfrac{y}{x}, \quad \cos\phi = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$