3.1 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f:

(i) $f(x,y) = \sin^{-1}(x+y)$ (ii) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{y^2+3}$

(iii) $f(x,y,z) = \sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$ (iv) $f(x,y,z) = z + \ln(1-x^2-y^2)$

3.2 (i) Έστω $f(x,y,z) = x^2+y^2-z$. Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσταθμικής επιφάνειας η οποία διέρχεται από το σημείο

(α) (1,-2,0) (β) (1,0,3) (γ) (0,0,0)

(ii) Έστω $f(x,y,z) = xyz+3$. Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσταθμικής επιφάνειας η οποία διέρχεται από το σημείο

(α) (1,0,2) (β) (-2,4,1) (γ) (0,0,0)

3.3 Να βρεθεί η περιοχή όπου η f είναι συνεχής.

(i) $f(x,y,z) = 3x^2 \mathrm{e}^{yz}\cos(xyz)$ (ii) $f(x,y,z) = \ln(4-x^2-y^2-z^2)$

(iii) $f(x,y,z) = \frac{y+1}{x^2+y^2-1}$ (iv) $f(x,y,z) = \sin\sqrt{x^2+y^2+3z^2}$

3.4 Να βρεθούν τα όρια (αν υπάρχουν):

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(1+x^2y^3)$ (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{x^2+2y^2}$

(iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (iv) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2+2y^2}$

(v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (vi) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\ln(x^2+y^2)$

3.5 Να βρεθούν τα όρια (αν υπάρχουν):

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \tan^{-1}\left[\frac{x^2+1}{x^2+(y-1)^2}\right]$

(ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \tan^{-1}\left[\frac{x^2-1}{x^2+(y-1)^2}\right]$

3.6 Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$.

3.7 Να βρεθούν οι $f_x(x,y)$ και $f_y(x,y)$ για τις πιο κάτω συναρτήσεις

(i) $f(x,y) = y^{-\frac{3}{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ (ii) $f(x,y) = x^3 \mathrm{e}^{-y} + y^3 \sec\sqrt{x}$

(iii) $f(x,y) = (y^2 \tan x)^{-\frac{4}{3}}$ (iv) $f(x,y) = \cosh(\sqrt{x}) \sinh^2(xy^2)$

3.8 Χρησιμοποιώντας πλεγμένη παραγώγιση, να βρεθούν οι $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$.

(i) $(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} = 1$ (ii) $x^2 + z\sin(xyz) = 0$

3.9 Να δειχθεί ότι οι πιο κάτω συναρτήσεις ικανοποιούν την εξίσωση του Laplace,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(i) $f(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y + \mathrm{e}^y \sin x$

(ii) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

(iii) $f(x,y) = \tan^{-1} \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

3.10 Να βρεθεί η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $(-1,1,5)$ της καμπύλης η οποία είναι η τομή της επιφάνειας $z = x^2 + 4y^2$ και

(i) του επιπέδου $x = -1$ (ii) του επιπέδου $y = 1$

3.11 Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι οι μερικές παράγωγοι $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$ υπάρχουν, αλλά η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$.

3.12 Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας, να βρεθεί η $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$

(i) $z = 3x^2y^3, \quad x = t^4,\ y = t^2$

(ii) $z = \ln(2x^2 + y), \quad x = \sqrt{t},\ y = t^{\frac{2}{3}}$

(iii) $z = 3\cos x - \sin xy, \quad x = \frac{1}{t},\ y = 3t$

(iv) $z = \sqrt{1 + x - 2xy^4}, \quad x = \ln t,\ y = t$

3.13 Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας, να βρεθούν οι $\frac{\partial z}{\partial u}$ και $\frac{\partial z}{\partial v}$

(i) $z = 3x - 2y, \quad x = u + v \ln u, \ y = u^2 - v \ln v$

(ii) $z = \mathrm{e}^{x^2 y}, \quad x = \sqrt{uv}, \ y = \frac{1}{v}$

(iii) $z = \cos x \sin y, \quad x = u - v, \ y = u^2 + v^2$

(iv) $z = \tan^{-1}(x^2 + y^2), \quad x = \mathrm{e}^u \sin v, \ y = \mathrm{e}^u \cos v$

3.14 (i) Έστω $z = \mathrm{e}^x f(x - y)$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

(ii) Έστω $z = f(y + cx) + g(y - cx)$, όπου $c \neq 0$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

3.15 Χρησιμοποιώντας ολικό διαφορικό, να βρεθεί κατά προσέγγιση η αλλαγή της $f(x, y)$ όταν (x, y) αλλάζει από το P στο Q.

(i) $f(x, y) = \frac{x+y}{xy}, \quad P(-1, -1), \ Q(-1.02, -2.04)$

(ii) $f(x, y) = \ln \sqrt{1 + xy}, \quad P(0, 2), \ Q(-0.09, 1.98)$

3.16 (i) Να δειχθεί ότι οι επιφάνειες $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $z = \frac{1}{10}(x^2 + y^2) + \frac{5}{2}$ τέμνονται στο $(3, 4, 5)$ και ότι έχουν κοινό εφαπτόμενο επίπεδο σε αυτό το σημείο.

(ii) Να δειχθεί ότι οι επιφάνειες $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ και $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ τέμνονται στο $(2, 2, 2\sqrt{2})$ και ότι έχουν εφαπτόμενα επίπεδα τα οποία τέμνονται κάθετα σε αυτό το σημείο.

3.17 Η γωνία θ ενός ορθογωνίου τριγώνου υπολογίζεται από τον τύπο

$$\theta = \sin^{-1} \frac{a}{c}$$

όπου a είναι το μήκος της πλευράς που είναι απέναντι του θ και c είναι το μήκος της υποτίνουσας. Υποθέτουμε ότι οι μετρήσεις $a = 3$cm και $c = 5$cm έχουν η κάθε μια μέγιστο δυνατό σφάλμα ίσο με 0.01cm. Χρησιμοποιώντας διαφορικά, να βρεθεί κατά προσέγγιση το μέγιστο δυνατό σφάλμα στον υπολογισμό της θ.

3.18 Να βρεθούν όλα τα σημεία τομής της ευθείας $x = -1 + t,\ y = 2 + t,\ z = 2t + 7$ και της επιφάνειας $z = x^2 + y^2$. Για κάθε σημείο τομής, να βρεθεί το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζει η κάθετος στο σημείο με τη δοσμένη ευθεία.

3.19 Να βρεθεί η κατευθυντική παράγωγος της f στο σημείο P στην κατεύθυνση του $\mathbf{a}$.

(i) $f(x, y) = y^2 \ln x, \quad P(1, 4),\ \mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

(ii) $f(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y, \quad P(0, \frac{\pi}{4}),\ \mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

(iii) $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad P(-2, 2),\ \mathbf{a} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$

(iv) $f(x, y) = x\mathrm{e}^y - y\mathrm{e}^x, \quad P(0, 0),\ \mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

3.20 Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση στην οποία η f έχει τη μέγιστη αύξηση στο σημείο P. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f στο σημείο P σε αυτή την κατεύθυνση.

(i) $f(x, y) = 20 - x^2 - y^2, \quad P(-1, -3)$

(ii) $f(x, y) = \mathrm{e}^{xy}, \quad P(2, 3)$

(iii) $f(x, y) = \cos(3x - y), \quad P(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$

(iv) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}, \quad P(3, 1)$

3.21 (i) Έστω $f(x, y) = \frac{y}{x+y}$. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ για το οποίο $D_{\mathbf{u}}f(2, 3) = 0$.

(ii) Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ το οποίο είναι κάθετο στο $P(1, -2)$ στην ισοσταθμική καμπύλη της $f(x, y) = 4x^2y$ που δίερχεται από το σημείο P.

(iii) Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ το οποίο είναι κάθετο στο $P(2, -3)$ στην ισοσταθμική καμπύλη της $f(x, y) = 3x^2y - xy$ που διέρχεται από το σημείο P.

3.22 Δίνεται ότι $D_{\mathbf{u}}f(1, 2) = -5$ αν $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$ και $D_{\mathbf{v}}f(1, 2) = -5$ αν $\mathbf{v} = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$. Να βρεθούν:

(i) $f_x(1, 2), \quad f_y(1, 2)$

(ii) η κατευθυντική παράγωγος της f στο σημείο $(1, 2)$ στην κατεύθυνση της αρχής των αξόνων.

3.23 Η θερμοκρασία στο σημείο (x, y) μιας μεταλλικής πλάκας στο επίπεδο xy ορίζεται από τον τύπο $T(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$.

(i) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας στο $(1, 1)$ στην κατεύθυνση του $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

(ii) Ένα μυρμήγκι βρίσκεται στο $(1, 1)$ και θέλει να περπατήσει στην κατεύθυνση όπου η θερμοκρασία έχει την μέγιστη μείωση. Να βρεθεί αυτή η κατεύθυνση.

3.24 Αν f και g είναι παραγωγίσιμες, τότε να αποδειχθεί ότι

(i) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

(ii) $\nabla(cf) = c\nabla f$, όπου c είναι σταθερά.

3.25 Να βρεθούν τα σχετικά μέγιστα, σχετικά ελάχιστα και σαγματικά σημεία.

(i) $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4 + 2$

(ii) $f(x, y) = x^2 + y - \mathrm{e}^y$

(iii) $f(x, y) = 2y^2x - yx^2 + 4xy$

(iv) $f(x, y) = y \sin x$

3.26 Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα των πιο κάτω συναρτήσεων στο δοσμένο κλειστό και φραγμένο σύνολο R.

(i) $f(x, y) = xy - x - 3y$ και R είναι η τριγωνική περιοχή με κορυφές (0,0), (0,4) και (5,0).

(ii) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ και R είναι η τετραγωνική περιοχή με κορυφές (0,0), (0,2), (2,2) και (2,0).

(iii) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ και R είναι η κυκλική περιοχή $x^2 + y^2 \leq 4$.

3.27 (i) Να βρεθούν όλα τα σημεία πάνω στο επίπεδο $x + y + z = 5$ στο πρώτο οκτημόριο για τα οποία η συνάρτηση $f(x, y, z) = xy^2z^2$ έχει μέγιστη τιμή.

(ii) Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας $x^2 - yz = 5$ τα οποία είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

3.28 (i) Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους της ενότητας 3.7, να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των ευθειών $x = 3t,\ y = 2t,\ z = t$ και $x = 2t,\ y = 2t + 3,\ z = 2t$.

(ii) Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους της ενότητας 3.7, να βρεθεί η απόσταση του σημείου $(-1, 3, 2)$ από το επίπεδο $x - 2y + z = 4$.

3.29 Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές του Lagrange, να βρεθούν τα ακρότατα της f υποκείμενη στις δοσμένες συνθήκες. Επίσης να βρεθούν τα σημεία στα οποία συμβαίνουν οι τα ακρότατα.

(i) $f(x,y) = xy, \quad 4x^2 + 8y^2 = 16$

(ii) $f(x,y) = x^2 - y, \quad x^2 + y^2 = 25$

(iii) $f(x,y,z) = 3x + 6y + 2z, \quad 2x^2 + 4y^2 + z^2 = 70$

(iv) $f(x,y,z) = xyz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

3.30 Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές του Lagrange, να λυθούν τα πιο κάτω προβλήματα.

(i) Να βρεθεί το σημείο της ευθείας $y = 2x + 3$ το οποίο είναι πλησιέστερο στο (4,2).

(ii) Να βρεθεί το σημείο του επιπέδου $x+2y+z = 1$ το οποίο είναι πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

(iii) Να βρεθεί το σημείο του επιπέδου $4x + 3y + z = 2$ το οποίο είναι πλησιέστερο στο (1,-1,1).

(iv) Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας $xy - z^2 = 1$ τα οποία είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.