2.1 (i) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η ευθεία $\mathbf{r} = (2+t)\mathbf{i} + (1-2t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ τέμνει το επίπεδο xz.

(ii) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η ευθεία $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + (1+2t)\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$ τέμνει το επίπεδο $3x - y - z = 2$.

2.2 Να υπολογιστούν τα όρια

(i) $\lim_{t\to 2}(t\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + t^2\mathbf{k})$

(ii) $\lim_{t\to \pi}(\cos 3t\mathbf{i} + \mathrm{e}^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k})$

(iii) $\lim_{t\to +\infty}\left(\tan^{-1} t\mathbf{i} + \dfrac{t}{t^2+3}\mathbf{j} + \cos\dfrac{2}{t}\mathbf{k}\right)$

(iv) $\lim_{t\to 1}\left(\dfrac{3}{t^2}\mathbf{i} + \dfrac{\ln t}{t^2-1}\mathbf{j} + \sin 2t\mathbf{k}\right)$

2.3 (i) Να δειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των $\mathbf{r}_1(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 3t^3\mathbf{k}$ και $\mathbf{r}_2(t) = (t-1)\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^2\mathbf{j} + (5-t)\mathbf{k}$ τέμνονται στο σημείο $P(1,1,3)$. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτομένες των $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ στο σημείο P.

(ii) Να δειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των $\mathbf{r}_1(t) = 2\mathrm{e}^{-t}\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (t^2+3)\mathbf{k}$ και $\mathbf{r}_2(t) = (1-t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t^3+4)\mathbf{k}$ τέμνονται στο σημείο $P(2,1,3)$. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτομένες των $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ στο σημείο P.

2.4 Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας να βρεθεί η $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u}$:

(i) $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad t = 4u+1$

(ii) $\mathbf{r} = 3\cos t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j}, \quad t = \pi u$

2.5 Έστω $\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}$, $a > 0$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t) = 0$. Να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία αυτού του αποτελέσματος.

2.6 Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\right] = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}\mathbf{r}' - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}.$$

2.7 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int\left(t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}\right)\mathrm{d}t$

(ii) $\displaystyle\int\left(\mathrm{e}^{-t}\mathbf{i} + \mathrm{e}^{t}\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}\right)\mathrm{d}t$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{2t}\mathbf{i} + \mathrm{e}^{-t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}\right) \mathrm{d}t$

(iv) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \Big((3-t)^{3/2}\mathbf{i} + (3+t)^{3/2}\mathbf{j} + \mathbf{k}\Big) \mathrm{d}t$

2.8 (i) Δίνεται ότι $\mathbf{r}''(t) = \mathbf{i} + \mathrm{e}^t\mathbf{j},\ \ \mathbf{r}(0) = 2\mathbf{i},\ \mathbf{r}'(0) = \mathbf{j}$. Να βρεθεί το $\mathbf{r}(t)$.

(ii) Δίνεται ότι $\mathbf{r}'(t) = \mathrm{e}^{-2t}\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} - \mathbf{k},\ \ \mathbf{r}(0) = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Να βρεθεί το $\mathbf{r}(t)$.

(iii) Δίνεται ότι $\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} + \frac{t}{t^2+1}\mathbf{j} + t\mathbf{k},\ \ \mathbf{r}(1) = \mathbf{0}$. Να βρεθεί το $\mathbf{r}(t)$.

(iv) Δίνεται ότι $\mathbf{r}''(t) = (4\sin 2t)\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + \mathrm{e}^{-t}\mathbf{k},\ \ \mathbf{r}(0) = 2\mathbf{i},\ \mathbf{r}'(0) = \mathbf{k}$. Να βρεθεί το $\mathbf{r}(t)$.

2.9 Να βρεθεί το μήκος τόξου των πιο κάτω καμπυλών στο διάστημα που δίνεται:

(i) $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

(ii) $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\mathbf{i} + \sin^3 t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

(iii) $\mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^t\mathbf{i} + \mathrm{e}^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

(iv) $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\mathbf{k}, \quad -1 \le t \le 1$

2.10 Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις των πιο κάτω καμπυλών συναρτήσει της παραμέτρου s (μήκος τόξου). Να χρησιμοποιηθεί ως σημείο αναφοράς το σημείο της καμπύλης όπου $t = 0$.

(i) $\mathbf{r}(t) = (1+t)^2\mathbf{i} + (1+t)^3\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$

(ii) $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^t\cos t)\mathbf{i} + (\mathrm{e}^t\sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

(iii) $\mathbf{r}(t) = \sin(\mathrm{e}^t)\mathbf{i} + \cos(\mathrm{e}^t)\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathrm{e}^t\mathbf{k}, \quad t \ge 0$

(iv) $\mathbf{r}(t) = (t\cos t)\mathbf{i} + (t\sin t)\mathbf{j} + \frac{2}{3}\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}}\mathbf{k}, \quad t \ge 0$

2.11 Να δειχθεί ότι σε κυλινδρικες συντεταγμένες μια καμπύλη η οποία ορίζεται παραμετρικά, $r = r(t),\ \theta = \theta(t),\ z = z(t),\ a \le t \le b$, έχει μήκος τόξου

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t.$$

Χρησιμοποιώντας τον πιο πάνω τύπο να βρεθεί το μήκος τόξου των πιο κάτω καμπυλών στο διάστημα που δίνεται:

(i) $r = \mathrm{e}^{2t},\ \theta = t,\ z = \mathrm{e}^{2t}, \quad 0 \le t \le \ln 2$

(ii) $r = t^2,\ \theta = \ln t,\ z = \frac{1}{3}t^3, \quad 1 \le t \le 2$

2.12 Να βρεθεί το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{T}$ και μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{N}$ για τις πιο κάτω καμπύλες στο σημείο που δίνεται:

(i) $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 4\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t = \frac{\pi}{2}$

(ii) $x = \mathrm{e}^t \cos t,\ y = \mathrm{e}^t \sin t,\ z = \mathrm{e}^t, \quad t = 0$

(iii) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t = 1$

(iv) $x = \cosh t,\ y = \sinh t,\ z = t, \quad t = \ln 2$

2.13 Έχουμε δει ότι το διάνυσμα $\mathbf{N}$ έχει την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{T}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}\right]$. Χρησιμοποιώντας την άσκηση 2.6, να δειχθεί ότι διάνυσμα $\mathbf{N}$ έχει επίσης την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{u} = \|\mathbf{r}'\|^2\mathbf{r}'' - (\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'')\mathbf{r}'$ και επομένως το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{N}$ μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$.

Χρησιμοποιώντας τον πιο πάνω τύπο να βρεθεί μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{N}$ για τις πιο κάτω καμπύλες στο σημείο που δίνεται:

(i) $x = \mathrm{e}^t,\ y = \mathrm{e}^{-t},\ z = t, \quad t = 0$

(ii) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}, \quad t = 0$

(iii) $x = \sin t,\ y = \cos t,\ z = \frac{1}{2}t^2, \quad t = 0$

2.14 (i) Να δειχθεί ότι για την καμπύλη $y = f(x)$, η καμπυλότητα $\kappa(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$\kappa(x) = \frac{\left|\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|}{\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

(ii) Να δειχθεί ότι για την καμπύλη $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, η καμπυλότητα δίνεται από τον τύπο

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(iii) Να δειχθεί ότι μια καμπύλη σε πολικές συντεταγμένες η οποία περιγράφεται από την εξίσωση $r = f(\theta)$ έχει καμπυλότητα ίση με

$$\kappa = \frac{\left[r^2 + 2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 - r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\theta^2}\right]}{\left[r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

2.15 Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο τύπο, να βρεθεί η καμπυλότητα των πιο κάτω καμπύλων στο δοσμένο σημείο:

(i) $y = \frac{1}{3}x^3, \quad x = 0$

(ii) $y = \mathrm{e}^{-x}, \quad x = 1$

(iii) $y^2 - 4x^2 = 9, \quad (2, 5)$

2.16 Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο τύπο, να βρεθεί η καμπυλότητα των πιο κάτω καμπύλων στο δοσμένο σημείο:

(i) $\mathbf{r}(t) = (4\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}, \quad t = \frac{\pi}{2}$

(ii) $x = 1 - t^3,\ y = 1 - t^2, \quad t = 1$

(iii) $x = 2abt,\ y = b^2t^2, \quad t = 1, \quad (a > 0,\ b > 0)$

2.17 Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο τύπο, να βρεθεί η καμπυλότητα των πιο κάτω καμπύλων στο δοσμένο σημείο:

(i) $r = \theta, \quad \theta = 1$

(ii) $r = a(1 + \cos\theta), \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

(iii) $r = \mathrm{e}^{2\theta}, \quad \theta = 1$

2.18 (i) Να βρεθεί η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της ακτίνας καμπυλότητας της καμπύλης $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = \cos t$.

(ii) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της ακτίνας καμπυλότητας της καμπύλης $x = \mathrm{e}^t,\ y = \mathrm{e}^{-t},\ z = \sqrt{2}t$.

2.19 Έστω $\mathbf{r}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$. Να βρεθούν:

(i) $\|\mathbf{r}'(t)\|$ (ii) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ (iii) $\displaystyle\int_1^3 \|\mathbf{r}'(t)\|\mathrm{d}t$

2.20 Έστω η καμπύλη C η οποία ορίζεται παραμετρικά συναρτήσει της παραμέτρου μήκους τόξου,

$$x = \frac{3}{5}s + 1, \quad y = \frac{4}{5}s - 2, \qquad 0 \leq s \leq 10$$

(i) Να βρεθεί το $\mathbf{T}(s)$.

(ii) Να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης και του διανύσματος $\mathbf{T}(5)$.

2.21 (i) Η κίνηση ενός σωματιδίου περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r} = (t - t^2)\mathbf{i} - t^2\mathbf{j}$. Να βρεθεί η ελάχιστη ταχύτητα του σωματιδίου και η θέση του όταν έχει αυτή τη ταχύτητα.

(ii) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη ταχύτητα του σωματιδίου του οποίου η κίνηση περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r} = \sin 3t\mathbf{i} - 2\cos 3t\mathbf{j}$.

(iii) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη ταχύτητα του σωματιδίου του οποίου η κίνηση περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r} = 3\cos 2t\mathbf{i} + \sin 2t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$.

2.22 Να βρεθεί το σημείο πάνω στη τροχιά

$$\mathbf{r} = (t^2 - 5t)\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

στο οποίο η ταχύτητα τέμνει κάθετα την επιτάχυνση.

2.23 (i) Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$ με σταθερή ταχύτητα 3 μονάδες/sec. Να βρεθεί η κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης ως συνάρτηση του x.

(ii) Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \mathrm{e}^x$ με σταθερή ταχύτητα 2 μονάδες/sec. Να βρεθεί η κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης ως συνάρτηση του x.

2.24 Ένα σωματίδιο εκτοξεύεται από το έδαφος με ταχύτητα 980 m/sec που σχηματίζει γωνία 45^o με την οριζόντια. Να βρεθούν:

(i) οι παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς του σωματιδίου,

(ii) το μέγιστο ύψος που θα φθάσει το σωματίδιο,

(iii) η οριζόντια απόσταση που θα καλύψει το σωματίδιο,

(iv) η ταχύτητα του σωματιδίου όταν θα επιστρέψει στο έδαφος.

2.25 Ένα σωματίδιο εκτοξεύεται από κτίριο που έχει ύψος 168m με ταχύτητα 80 m/sec που σχηματίζει γωνία 60^o με την οριζόντια. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου στο έδαφος όπου θα κτυπήσει το σωματίδιο, από το κτίριο.

2.26 Ένα σωματίδιο πέφτει από τραπέζι ύψους 4 ft ενώ βρισκόταν σε κίνηση με σταθερή ταχύτητα 5 ft/sec.

(i) Να βρεθεί ο χρόνος που χρειάστηκε το σωματίδιο από τη στιγμή που έπεσε από το τραπέζι μέχρι να φθάσει στο έδαφος.

(ii) Να βρεθεί η ταχύτητα του σωματιδίου όταν θα κτυπήσει στο έδαφος.

(iii) Αν τη ίδια χρονική στιγμή όπου το σωματίδιο έπεφτε από το τραπέζι, ένα δεύτερο σωματίδιο αφήνεται να πέσει (δηλαδή, η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν) από το ύψος του τραπεζιού. Να βρεθεί ποιο σωματίδιο θα κτυπήσει πρώτο το έδαφος.