ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1 Να περιγραφεί η επιφάνεια της οποίας η εξίσωση δίνεται πιο κάτω.

(i) $x^2+y^2+z^2-2x-6y-8z+1=0$

(ii) $2x^2+2y^2+2z^2-2x-3y+5z-2=0$

(iii) $x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z+3=0$

(iv) $x^2+y^2+z^2-3x+4y-8z+25=0$

1.2 Να γίνει η γραφική παράσταση των πιο κάτω επιφανειών:

(i) $x^2+y^2=25$ (ii) y^2+z^2 (iii) $x^2+z^2=25$

(iv) $y=\sin x$ (v) $z=\cos x$

1.3 Να δειχθεί ότι για όλες τις τιμές του θ και ϕ το σημείο $(a\sin\phi\cos\theta, a\sin\phi\sin\theta, a\cos\phi)$ βρίσκεται πάνω στη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=a^2$.

1.4 (i) Έστω $\mathbf{u}=(1,0,1),\ \mathbf{v}=(3,2,0),\ \mathbf{w}=(0,1,1)$. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) σταθερές $c_1,\ c_2,\ c_3$ τέτοιες ώστε

$$c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}+c_3\mathbf{w}=(-1,1,5).$$

(ii) Έστω $\mathbf{u}-\mathbf{i}-\mathbf{j},\ \mathbf{v}=3\mathbf{i}+\mathbf{k},\mathbf{w}=4\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) σταθερές $c_1,\ c_2,\ c_3$ τέτοιες ώστε

$$c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}+c_3\mathbf{w}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}.$$

1.5 Έστω $\mathbf{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ και $\mathbf{r}=(x,y,z)$. Να περιγραφεί το σύνολο των σημείων (x,y,z) για τα οποία

(i) $\|\mathbf{r}\|=2$ (ii) $\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|=3$ (iii) $\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|\le 1$

1.6 (i) Να βρεθεί το διάνυσμα που έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{u}=(7,0,-6)$, αλλά με διπλάσιο μήκος από το $\mathbf{u}$.

(ii) Να βρεθεί το διάνυσμα που έχει αντίθετη κατεύθυνση με το $\mathbf{u}=-3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+k$, αλλά με διπλάσιο μήκος από το $\mathbf{u}$.

1.7 Να δειχθεί ότι τα διευθύνοντα συνημίτονα ενός διανύσματος ικανοποιούν την εξίσωση

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

1.8 Δίνονται τα σημεία A(1,1,0), B(-2,3,-4) και P(-3,1,2).

(i) Να βρεθεί $\|\mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AP}\|$

(ii) Να βρεθεί η απόσταση του P από την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B.

1.9 Αν τα διανύσματα $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$ είναι μη-μηδενικά και κάθετα μεταξύ τους, τότε να αποδειχθεί ότι κάθε διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

όπου

$$c_i = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_i\|^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k},\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ και $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα να γραφεί το διάνυσμα $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$.

1.10 Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου που έχει κορυφές $A(1,0,1),\ B(0,2,3)$ και $C(2,1,0)$. Στη συνέχεια να βρεθεί το μήκος του ύψους από τη κορυφή C στη πλευρά AB.

1.11 Να αποδειχθούν τα πιο κάτω

(i) $(\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

(ii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

1.12 Να αποδειχθεί ότι

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

1.13 (i) Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η ευθεία $x = -2,\ y = 4 + 2t,\ z = -3 + t$ τέμνει το xy-επίπεδο, το xz-επίπεδο και το yz-επίπεδο.

(ii) Να βρεθεί το σημείο στο οποίο η ευθεία $x = 2 - t,\ y = 3t,\ z = -1 + 2t$ τέμνει το επίπεδο $2y + 3z = 6$.

(iii) Να βρεθεί που η ευθεία $x = 1 + t,\ y = 3 - t,\ z = 2t$ τέμνει το κύλινδρο $x^2 + y^2 = 16$.

1.14 Αν $a,\ b$ και c είναι μη-μηδενικές σταθερές, να δειχθεί ότι κάθε σημείο της ευθείας $x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct$ ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

και αντίθετα, κάθε σημείο (x, y, z) που ικανοποιεί αυτές τις εξισώσεις βρίσκεται πάνω στην ευθεία. (Οι πιο πάνω εξισώσεις καλούνται **συμμετρικές εξισώσεις** της γραμμής.)

1.15 Να εξεταστεί αν τα πιο κάτω ζεύγη ευθειών τέμνονται. Στη περίπτωση που τέμνονται, να βρεθεί το σημείο τομής τους:

(i) $x = 2 + t,\ y = 2 + 3t,\ z = 3 + t$ και $x = 2 + t,\ y = 3 + 4t,\ z = 4 + 2t$

(ii) $x = -1 + 4t,\ y = 3 + t,\ z = 1$ και $x = -13 + 12t,\ y = 1 + 6t,\ z = 2 + 3t$

(iii) $x = 1 + 7t,\ y = 3 + t,\ z = 5 - 3t$ και $x = 4 - t,\ y = 6,\ z = 7 + 2t$

(iv) $x = 2 + 8t,\ y = 6 - 8t,\ z = 10t$ και $x = 3 + 8t,\ y = 5 - 3t,\ z = 6 + t$

1.16 (i) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ του σημείου $(-2, 1, 1)$ και της ευθείας $x = 3 - t,\ y = t,\ z = 1 + 2t$.

(ii) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ του σημείου $(1, 4, -3)$ και της ευθείας $x = 2 + t,\ y = -1 - t,\ z = 3t$.

(iii) Να επαληθευθεί ότι οι ευθείες $x = 2 - t,\ y = 2t,\ z = 1 + t$ και $x = 1 + 2t,\ y = 3 - 4t,\ z = 5 - 2t$ είναι παράλληλες και να βρεθεί η απόσταση μεταξύ τους.

1.17 Έστω οι ευθείες L_1 και L_2 με εξισώσεις

$$x = 4t,\ y = 1 - 2t,\ z = 2 + 2t \ \text{ και } \ x = 1 + t,\ y = 1 - t,\ z = -1 + 4t,$$

αντίστοιχα.

(i) Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών L_1 και L_2.

(ii) Να βρεθεί η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες L_1 και L_2.

(iii) Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που είναι κάθετη στις ευθείες L_1 και L_2 και διέρχεται από το σημείο τομής τους.

1.18 (i) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(-1, 2, -5)$ και είναι κάθετο στα επίπεδα $2x - y + z = 1$ και $x + y - 2z = 3$.

(ii) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(1, 2, -1)$ και είναι κάθετο στην ευθεία στην οποία τέμνονται τα επίπεδα $2x + y + z = 2$ και $x + 2y + z = 3$.

(iii) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει το σημείο $(2, 0, 3)$ και την ευθεία $x = -1 + t,\ y = t,\ z = -4 + 2t$.

1.19 Να δειχθεί ότι οι ευθείες

$$x = -1 + 4t, \quad y = 3 + t, \quad z = 1$$

και

$$x = -13 + 12t, \quad y = 1 + 6t, \quad z = 2 + 3t$$

τέμνονται και να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου το οποίον ορίζουν.

1.20 (i) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ του σημείου $(0, 1, 5)$ και του επιπέδου $3x + 6y - 2z = 5$.

(ii) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των παράλληλων επιπέδων $2x - 3y + 4z = 7$ και $4x - 6y + 8z = 3$.

(iii) Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των ευθειών $x = 3 - t,\ y = 4 + 4t,\ z = 1 + 2t$ και $x = t,\ y = 3,\ z = 2t$.

1.21 Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας που έχει κέντρο $(2, 1 - 3)$ και είναι εφαπτόμενη στο επίπεδο $x - 3y + 2z = 4$.

1.22 (i) Να μετασχηματισθούν οι καρτεσιανές συντεταγμένες $(4\sqrt{3}, 4, -4)$ σε κυλινδρικές.

(ii) Να μετασχηματισθούν οι κυλινδρικές συντεταγμένες $(4, \frac{\pi}{6}, 3)$ σε καρτεσιανές.

(iii) Να μετασχηματισθούν οι καρτεσιανές συντεταγμένες $(1, \sqrt{3}, -2)$ σε σφαιρικές.

(iv) Να μετασχηματισθούν οι σφαιρικές συντεταγμένες $(5, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ σε καρτεσιανές.

(v) Να μετασχηματισθούν οι κυλινδρικές συντεταγμένες $(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}, 3)$ σε σφαιρικές.

(vi) Να μετασχηματισθούν οι σφαιρικές συντεταγμένες $(5, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3})$ σε κυλινδρικές.