

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1.1 (i) σφαίρα με κέντρο $(1, 3, 4)$, ακτίνα 5

(ii) σφαίρα με κέντρο $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$, ακτίνα $\frac{3}{4}\sqrt{6}$

(iii) το σημείο $(-1, 1, -1)$

(iv) Δεν έχει γραφική παράσταση.

1.4 (i) $c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = 3$

(ii) Δεν υπάρχουν.

1.5 (i) σφαίρα με κέντρο $(0, 0, 0)$ και ακτίνα 2.

(ii) σφαίρα με κέντρο (x_0, y_0, z_0) και ακτίνα 3.

(iii) Όλα τα σημεία πάνω ή μέσα στη σφαίρα με κέντρο (x_0, y_0, z_0) και ακτίνα 1.

1.6 (i) $14\mathbf{i} - 12\mathbf{k}$

(ii) $6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

1.8 (i) $4/\sqrt{29}$

(ii) $\sqrt{564/29}$

1.9 $c_1 = \frac{3}{7}, c_2 = -\frac{1}{3}, c_3 = \frac{1}{21}$

1.10 $E = \frac{\sqrt{26}}{2}, h = \frac{\sqrt{26}}{3}$

1.13 (i) Το xy -επίπεδο στο $(-2, 10, 0)$, το xz -επίπεδο στο $(-2, 0, -5)$ και δεν τέμνει το yz -επίπεδο.

(ii) $(5/4, 9/4, 1/2)$

(iii) $(0, 4, -2)$ και $(4, 0, 6)$

1.15 (i) τέμνονται στο $(1, -1, 2)$

(ii) τέμνονται στο $(-17, -1, 1)$

(iii) δεν τέμνονται, είναι παράλληλες

(iv) δεν τέμνονται, δεν είναι παράλληλες

1.16 (i) $2\sqrt{5}$

(ii) $4\sqrt{\frac{10}{11}}$

(iii) $\sqrt{\frac{35}{6}}$

1.17 (i) $(2, 0, 3)$

(ii) $\theta \approx 48^\circ$

(iii) $x = 2 + 3t, y = 7t, z = 3 + t$

1.18 (i) $x + 5y + 3z = -16$

(ii) $x + y - 3z = 6$

(iii) $7x - y - 3z = 5$

1.19 $x - 4y + 4z = -9$

1.20 (i) $D = \frac{9}{7}$

(ii) $D = \frac{11}{\sqrt{116}}$

(iii) $D = \sqrt{6}$

1.21 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = \frac{121}{14}$

1.22 (i) $(8, \frac{\pi}{6}, -4)$

(ii) $(2\sqrt{3}, 2, 3)$

(iii) $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$

(iv) $(\frac{5\sqrt{6}}{4}, \frac{5\sqrt{2}}{5}, \frac{5\sqrt{2}}{2})$

(v) $(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$

(vi) $(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{4}, -\frac{5}{2})$

2.1 (i) $(\frac{5}{2}, 0, \frac{3}{2})$

(ii) $(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, -\frac{9}{4})$

2.2 (i) $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

(ii) $-\mathbf{i} + e^{-\pi}\mathbf{j} + \sqrt{\pi}\mathbf{k}$

(iii) $\frac{\pi}{2}\mathbf{i} + \mathbf{k}$

(iv) $3\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \sin 2\mathbf{k}$

2.3 (i) $\cos \theta = \frac{6}{\sqrt{258}} \Rightarrow \theta \approx 68^\circ$

(ii) $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow \theta \approx 74^\circ$

2.4 (i) $4\mathbf{i} + 8(4u + 1)\mathbf{j}$

(ii) $-3\pi \sin \pi u\mathbf{i} + 3\pi \cos \pi u$

2.7 (i) $\frac{t^3}{3}\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + \ln |t|\mathbf{k} + \mathbf{c}$

(ii) $-e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} + \mathbf{c}$

(iii) $\frac{1}{2}(e^2 - 1)\mathbf{i} + (1 - e^{-1})\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

(iv) $\frac{72\sqrt{6}}{5}\mathbf{i} + \frac{72\sqrt{6}}{5}\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

2.8 (i) $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{2}t^2 + 2)\mathbf{i} + (e^t - 1)\mathbf{j}$

(ii) $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})\mathbf{i} + (3 + \sin t)\mathbf{j} + (2 - t)\mathbf{k}$

(iii) $\mathbf{r}(t) = 2(t - 1)\mathbf{i} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t^2 + 1}{2} \right) \mathbf{j} + \frac{1}{2}(t^2 - 1)\mathbf{k}$

(iv) $\mathbf{r}(t) = (2 + 2t - \sin 2t)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + (2t - 1 + e^{-t})\mathbf{k}$

2.9 (i) $2\pi\sqrt{10}$

(ii) $\frac{3}{2}$

(iii) $e - e^{-1}$

(iv) $\sqrt{3}$

2.10 (i) $x = \frac{1}{9} \left[(27s + 13\sqrt{13})^{\frac{2}{3}} - 4 \right], y = \frac{1}{27} \left[(27s + 13\sqrt{13})^{\frac{2}{3}} - 4 \right]^{\frac{3}{2}}, 0 \leq s \leq \frac{80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}}{27}$

(ii) $x = (\frac{s}{\sqrt{2}} + 1) \cos[\ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)], y = (\frac{s}{\sqrt{2}} + 1) \sin[\ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)], 0 \leq s \leq \sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$

(iii) $x = \sin(1 + \frac{s}{2}), y = \cos(1 + \frac{s}{2}), z = \sqrt{3}(1 + \frac{s}{2}), s \geq 0$

(iv) $x = (\sqrt{2s+1} - 1) \cos(\sqrt{2s+1} - 1)$, $y = (\sqrt{2s+1} - 1) \sin(\sqrt{2s+1} - 1)$, $z = \frac{2}{3}\sqrt{2}(\sqrt{2s+1} - 1)^{\frac{3}{2}}$, $s \geq 0$

2.11 (i) $\frac{9}{2}$

(ii) $9 - 2\sqrt{6}$

2.12 (i) $\mathbf{T}(\frac{\pi}{2}) = -\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{k}$, $\mathbf{N}(\frac{\pi}{2}) = -\mathbf{j}$

(ii) $\mathbf{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\mathbf{N}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$

(iii) $\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$, $\mathbf{N}(1) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$

(iv) $\mathbf{T}(\ln 2) = \frac{3}{5\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{4}{5\sqrt{2}}\mathbf{k}$, $\mathbf{N}(\ln 2) = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$

2.13 (i) $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

(ii) $\mathbf{N} = \mathbf{j}$

(iii) $\mathbf{N} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$

2.15 (i) $\kappa(x) = \frac{2|x|}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}$, $\kappa(0) = 0$

(ii) $\kappa(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-2x})^{\frac{3}{2}}}$, $\kappa(1) = \frac{e^{-1}}{(1+e^{-2})^{\frac{3}{2}}}$

(iii) $\kappa = \frac{36}{89\sqrt{89}}$

2.16 (i) $\kappa = \frac{1}{16}$

(ii) $\kappa = 0$

(iii) $\kappa = \frac{a}{2(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$

2.17 (i) $\kappa(1) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

(ii) $\kappa(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2a\sqrt{2}}$

(iii) $\kappa(1) = \frac{1}{\sqrt{5}e^2}$

2.18 (i) $\rho_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\rho_{max} = 2$

(ii) $\rho_{min} = 2\sqrt{2}$

2.19 (i) $2t + \frac{1}{t}$

(ii) $2t + \frac{1}{t}$

(iii) $8 + \ln 3$

2.20 (i) $\mathbf{T}(5) = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$

2.21 (i) $\|\mathbf{v}\|_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathbf{r} = \frac{3}{16}\mathbf{i} - \frac{1}{16}\mathbf{j}$

(ii) $\|\mathbf{v}\|_{min} = 3$, $\|\mathbf{v}\|_{max} = 6$

(iii) $\|\mathbf{v}\|_{min} = 2\sqrt{5}$, $\|\mathbf{v}\|_{max} = 2\sqrt{13}$

2.22 $\mathbf{r} = -\frac{19}{16}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} + \frac{3}{16}\mathbf{k}$

2.23 (i) $a_N = \frac{18}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(ii) $a_N = \frac{4e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$

2.24 (i) $x = 490\sqrt{2}t$, $y = 490\sqrt{2}t - 5t^2$

(ii) $y_{max} = 24010\text{m}$

(iii) $x_{max} = 96040\text{m}$

(iv) 980 m/sec

2.25 640m

2.26 (i) $t = \frac{1}{2}\text{sec}$

(ii) $\sqrt{281}\text{ ft/sec}$

(iii) Θα κτυπήσουν στο έδαφος και οι δύο την ίδια χρονική στιγμή, όταν $t = \frac{1}{2}$.

3.1 (i) Όλα τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ των παράλληλων ευθειών $y = 1 - x$ και $y = -1 - x$.

(ii) Όλα τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ των καθέτων ευθειών $x = \pm 2$.

(iii) Όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω και μέσα στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

(iv) Όλα τα σημεία που βρίσκονται μέσα στο κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$.

3.2 (i) (α) $x^2 + y^2 - z = 5$, (β) $x^2 + y^2 - z = -3$, (γ) $x^2 + y^2 - z = 0$

(ii) (α) $xyz = 0$, (β) $xyz = -8$, (γ) $xyz = 0$

3.3 (i) όλα τα σημεία στον \mathbb{R}^3 .

(ii) όλα τα σημεία μέσα στην σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 2.

(iii) όλα τα σημεία στον \mathbb{R}^3 , εκτός αυτά που βρίσκονται πάνω στον κύλινδρο $x^2 + z^2 = 1$.

(iv) όλα τα σημεία στον \mathbb{R}^3 .

3.4 (i) 0

(ii) $+\infty$ (Δεν υπάρχει)

(iii) 1

(iv) Δεν υπάρχει

(v) $+\infty$ (Δεν υπάρχει)

(vi) 0

3.5 (i) $\frac{\pi}{2}$

(ii) $-\frac{\pi}{2}$

3.7 (i) $f_x(x, y) = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{y^2 + x^2}$, $f_y(x, y) = -\frac{xy^{-\frac{3}{2}}}{y^2 + x^2} - \frac{3}{2}y^{-\frac{5}{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$

(ii) $f_x(x, y) = 3x^2 e^{-y} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^3 \sec \sqrt{x} \tan \sqrt{x}$, $f_y(x, y) = -x^3 e^{-y} + 3y^2 \sec \sqrt{x}$

(iii) $f_x(x, y) = -\frac{4}{3}y^2 \sec^2 x (y^2 \tan x)^{-\frac{7}{3}}$, $f_y(x, y) = \frac{8}{3}y \tan x (y^2 \tan x)^{-\frac{7}{3}}$

(iv) $f_x(x, y) = 2y^2 \cosh \sqrt{x} \sinh(xy^2) \cosh(xy^2) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \sinh \sqrt{x} \sinh^2(xy^2)$,
 $f_y(x, y) = 4xy \cosh \sqrt{x} \sinh(xy^2) \cosh(xy^2)$

3.8 (i) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$

(ii) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x + yz^2 \cos(xyz)}{xyz \cos(xyz) + \sin(xyz)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz^2 \cos(xyz)}{xyz \cos(xyz) + \sin(xyz)}$

3.10 (i) 8 (ii) -2

3.12 (i) $42t^{13}$

(ii) $\frac{2(3+t^{-\frac{1}{3}})}{3(2t+t^{\frac{2}{3}})}$

(iii) $3t^{-2} \sin(\frac{1}{t})$

(iv) $\frac{1-2t^4-8t^4 \ln t}{2t\sqrt{1+\ln t-2t^4 \ln t}}$

3.13 (i) $\frac{\partial z}{\partial u} = 3 + 3\frac{v}{u} - 4u$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 2 + 3 \ln u + 2 \ln v$

(ii) $\frac{\partial z}{\partial u} = e^u$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$

(iii) $\frac{\partial z}{\partial u} = -\sin(u-v) \sin(u^2+v^2) + 2u \cos(u-v) \cos(u^2+v^2)$,
 $\frac{\partial z}{\partial v} = \sin(u-v) \sin(u^2+v^2) + 2v \cos(u-v) \cos(u^2+v^2)$

(iv) $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2e^u}{1+e^{4u}}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$

3.15 (i) $df = 0.03$

(ii) $df = -0.09$

3.16 (i) Οι δύο επιφάνειες έχουν ως κάθετο διάνυσμα το $\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

(ii) $\mathbf{n}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \mathbf{k}$

3.17 $|d\theta| \leq 0.004$

3.18 $(-2, 1, 5)$, $(0, 3, 9)$

Στο $(-2,1,5)$, $\cos \theta = \frac{4}{3\sqrt{14}}$. Στο $(0,3,9)$, $\cos \theta = \frac{4}{\sqrt{222}}$

3.19 (i) $-8\sqrt{2}$ (ii) $\frac{7}{\sqrt{58}}$ (iii) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (iv) $\frac{7}{\sqrt{29}}$

3.20 (i) $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$, $-\|\nabla f(-1, -3)\| = -2\sqrt{10}\| =$

(ii) $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$, $-\|\nabla f(2, 3)\| = -\sqrt{13}e^6$

(iii) $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $-\|\nabla f(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})\| = -\sqrt{5}$

(iv) $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$, $-\|\nabla f(3, 1)\| = -\frac{\sqrt{5}}{8}$

3.21 (i) $\mathbf{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$

(ii) $\mathbf{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{17}}(-4\mathbf{i} + \mathbf{j})$

(iii) $\mathbf{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{1189}}(-33\mathbf{i} + 10\mathbf{j})$

3.22 (i) $f_x(1, 2) = 5$, $f_y(1, 2) = 10$

(ii) $D_{\mathbf{u}}f = -5\sqrt{5}$

3.23 (i) $DT = \frac{1}{9\sqrt{5}}$

(ii) $\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

3.25 (i) Σταγματικό σημείο: (0,0), σχετικά ελάχιστα: (-1,-1), (1,1)

(ii) Σταγματικό σημείο: (0,0)

(iii) Σταγματικά σημεία: (0,0), (0,-2), (4,0), σχετικό ελάχιστο: $(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$

(iv) Σταγματικά σημεία: $(n\pi, 0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

3.26 (i) Απόλυτο μέγιστο =0, απόλυτο ελάχιστο =-12

(ii) Απόλυτο μέγιστο =3, απόλυτο ελάχιστο =-1

(iii) Απόλυτο μέγιστο =33/4, απόλυτο ελάχιστο =-1/4

3.27 (i) (1, 2, 2)

(ii) $(\pm\sqrt{5}, 0, 0)$

3.28 (i) $\sqrt{6}$

(ii) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

3.29 (i) Μέγιστο $\sqrt{2}$ στα σημεία $(-\sqrt{2}, -1)$ και $(\sqrt{2}, 1)$, ελάχιστο $-\sqrt{2}$ στα σημεία $(-\sqrt{2}, 1)$ και $(\sqrt{2}, -1)$

(ii) Μέγιστο $\frac{101}{4}$ στα σημεία $(\pm\frac{\sqrt{11}}{2}, -\frac{1}{2})$, ελάχιστο -5 στο σημείο (0, 5)

(iii) Μέγιστο 35 στο σημείο (3,3,4), ελάχιστο -35 στο σημείο $(-3, -3, -4)$

(iv) Μέγιστο $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ στα σημεία

$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

ελάχιστο $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ στα σημεία

$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

3.30 (i) $(\frac{2}{5}, \frac{19}{5})$

(ii) $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$

(iii) (1, -1, 1)

(iv) (1, 1, 0), (-1, -1, 0)