Κεφάλαιο 8

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

8.1 Εισαγωγή

Αν V και W είναι διανυσματικοί χώροι και F είναι μια απεικόνιση (συνάρτηση) που σχετίζει μοναδικά τα διανύσματα του W με κάθε διάνυσμα του V, τότε λέμε ότι η F **απεικονίζει** το V πάνω στο W και γράφουμε

$$F \ : V \to W.$$

Επιπλέον αν $w \in W$ και $v \in V$ γράφουμε

$$w = F(v).$$

Ο διανυσματικός χώρος V καλείται **πεδίο ορισμού** της F και ο διανυσματικός χώρος W καλείται **πεδίο απεικόνισης** της F.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$F(x, y) = (2x + y, x + y, x + 2y)$$

απεικονίζει τον $\mathbb{R}^2$ πάνω στον $\mathbb{R}^3$. Δηλαδή, αν $v \in \mathbb{R}^2$ και $w \in \mathbb{R}^3$ έχουμε $w = F(v)$, όπου $v = (x, y)$ και $w = (2x + y, x + y, x + 2y)$.

Ειδικότερα, έστω $v = (2,3)$, τότε $x = 2$ και $y = 3$. Βρίσκουμε

$$w = F(v) = F(2,3) = (7,5,8).$$

Ορισμός: Έστω ότι V και W είναι δύο διανυσματικοί χώροι πάνω στον $\mathbb{R}$ και έστω ότι

$$T \ : V \to W$$

είναι μια απεικόνιση. Λέμε ότι η T είναι μια **γραμμική απεικόνιση** ή ένας **γραμμικός μετασχηματισμός**, αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V$

(ii) $T(\lambda v_1) = \lambda T(v_1), \quad \forall v_1 \in V$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Οι ιδιότητες στον πιο πάνω ορισμό μπορούν να αντικατασταθούν με τη σχέση

$$T(\lambda v_1 + k\lambda_2) = \lambda T(v_1) + kT(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V \text{ και } \forall \lambda,\ k \in \mathbb{R}.$$

Γενικά, αν $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, τότε

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \cdots + \lambda_n T(v_n).$$

Παράδειγμα: Έστω η απεικόνιση

$$T(x,y) = (x+y, x-y, 2x)$$

από $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Να δειχθεί ότι είναι γραμμική.

Λύση:

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 + (a_1 - a_2)x + (2a_0 + 3a_1)x^2$$

από $P_2 \to P_2$ είναι γραμμική.

Λύση:

Μετασχηματισμός πινάκων: Η γραμμική απεικόνιση

$$T(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$$

την οποία είχαμε δει σε προηγούμενο παράδειγμα, γράφεται

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x \end{bmatrix}$$

η οποία μπορεί να εκφραστεί και ως

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Άρα για κάθε διάνυσμα $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, έχουμε

$$T(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X},$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Γενικότερα, αν $\mathbf{A}$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

είναι ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε το γινόμενο $\mathbf{AX}$ είναι ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$ και η απεικόνιση

$$T\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

που ορίζεται από τον τύπο

$$T(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

είναι γραμμική επειδή αν $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ και $k, \lambda \in \mathbb{R}$ τότε

$$T(k\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}) = \mathbf{A}(k\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}) = k\mathbf{Au} + \lambda\mathbf{Av} = kT(\mathbf{u}) + \lambda T(\mathbf{v}),$$

χρησιμοποιώντας ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των πινάκων.

Παράδειγμα: Έστω η γραμμική απεικόνιση

$$T \; Q\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{με} \quad T(x, y) = (2x + y, x - y).$$

Να εκφραστεί σε μετασχηματισμό πινάκων.

Λύση:

Παράδειγμα: Έστω ότι $\mathbf{A}$ είναι ένας 2×3 πίνακας και $T \; : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $T(\mathbf{X}) = \mathbf{AX}$ είναι γραμμική απεικόνιση. Δίνεται ότι

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστούν: (i) $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}\right)$ (ii) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$ (iii) ο πίνακας $\mathbf{A}$

Λύση:

Μηδενική απεικόνιση συμβολίζεται με 0 και ορίζεται ως

$$0(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Ταυτοτική απεικόνιση συμβολίζεται με I και είναι απεικόνιση $I \ : V \to V$ και ορίζεται με

$$I(\mathbf{v}) = v \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$