Κεφάλαιο 7

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

7.1 Εισαγωγή

Ορισμός: Αν $\mathbf{A}$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας, τότε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ καλείται **ιδιοδιάνυσμα** του $\mathbf{A}$ αν το $\mathbf{AX}$ είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του $\mathbf{X}$. Δηλαδή,

$$\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X}$$

για κάποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$. Το λ καλείται **ιδιοτιμή** του $\mathbf{A}$ και $\mathbf{X}$ είναι το ιδιοδιάνυσμα του $\mathbf{A}$ που αντιστοιχεί στο λ.

Παράδειγμα: Το διάνυσμα $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 2$ επειδή

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{X}.$$

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές του $n \times n$ πίνακα $\mathbf{A}$ γράφουμε την εξίσωση $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$ στη μορφή

$$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{IX}$$

ή ισοδύναμα

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

Από τον κανόνα του Cramer για να έχει η πιο πάνω εξίσωση μη μηδενικές λύσεις πρέπει να ισχύει

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Αυτή η σχέση καλείται **χαρακτηριστική εξίσωση** ή **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα $\mathbf{A}$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η χαρακτηριστική εξίσωση του $\mathbf{A}$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0.$$

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ιδιόχωροι: Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\mathbf{A}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ, είναι τα μη-μηδενικά διανύσματα τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση

$$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}.$$

Ισοδύναμα, τα ιδιοδιανύσματα είναι η λύση της εξίσωσης

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

Καλούμε αυτή τη λύση **ιδιόχωρο** του πίνακα $\mathbf{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι ιδιόχωροι του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -8 \\ 4 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix}.$$