Κεφάλαιο 6

ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

6.1 Εισαγωγή

Ορισμός: Το **εσωτερικό γινόμενο** ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου V είναι μια συνάρτηση η οποία σχετίζει ένα πραγματικό αριθμό $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ με κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε τα πιο κάτω αξιώματα να ιακνοποιούνται $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ και $\forall k \in \mathbb{R}$.

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
3. $k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ ($\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \emptyset$).

Ο διανυσματικός χώρος V καλείται **πραγματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο**.

Ορισμός: Αν V είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε το **μήκος (μέτρο)** ενός διανύσματος $\mathbf{u} \in V$ συμβολίζεται με $\|\mathbf{u}\|$ και ορίζεται ως

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}.$$

Η **απόσταση** μεταξύ δύο διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ συμβολίζεται με $\mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ και ορίζεται ως

$$\mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Παράδειγμα: Έστω $V = \mathbb{R}^n$. Αν $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, τότε ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο ως

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Τα αξιώματα ικανοποιούνται (ιδιότητες των διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^n$) και

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots u_n^2}$$

$$\mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

Παράδειγμα: Έστω $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in P_2$. Δηλαδή,

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad \mathbf{q} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

Τότε ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στο P_2 ως

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Τα αξιώματα ικανοποιούνται. Το μήκος είναι ίσο με

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2}$$

Παράδειγμα: Έστω $\mathbf{f} = f(x)$ και $\mathbf{g} = g(x)$ δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, b]$. Ορίζουμε

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Ο πιο πάνω τύπος ορίζει εσωτερικό γινόμενο επειδή

1. $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x = \langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle$
2. $\langle \mathbf{f}+\mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle = \int_a^b [f(x)+g(x)]h(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)h(x)\mathrm{d}x = \langle \mathbf{f}, \mathbf{h} \rangle + \langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle$
3. $\langle k\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b kf(x)g(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = k\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$
4. Επειδή $[f(x)]^2 \geq 0$, τότε

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = \int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x \geq 0.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε $\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x = 0$ αν και μόνο αν $f(x) = 0 \ \ \forall x \in [a, b]$.

Το μέτρο ορίζεται ως

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle} = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x}.$$

Θεώρημα (Ιδιότητες): Αν $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ είναι διανύσματα ενός πραγματικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο και $k \in \mathbb{R}$, τότε

(i) $\langle \emptyset, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \emptyset \rangle = 0$

(ii) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$

(iii) $\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

(iv) $\langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

(v) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}-\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι

$$\langle \mathbf{u} - 2\mathbf{v}, 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v} \rangle = 3\|\mathbf{u}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - 8\|\mathbf{v}\|^2.$$

Λύση:

6.2 Ορθογωνιότητα

Θεώρημα (Ανισότητα των Cauchy-Schwarz): Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα ενός πραγματικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο, τότε

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

Απόδειξη: Αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, τότε

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$$

και επομένως το θεώρημα ισχύει. Τώρα, υποθέτουμε ότι $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Θέτουμε

$$a = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle, \quad b = 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \quad c = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

και έστω $t \in \mathbb{R}$. Από τις ιδιότητες,

$$\langle t\mathbf{u} + \mathbf{v}, t\mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \geq 0 \Rightarrow$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle t^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0 \Rightarrow$$
$$at^2 + bt + c \geq 0.$$

Αυτή η εξίσωση μας δηλώνει ότι η εξίσωση $at^2 + bt + c = 0$ έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες ή δύο μιγαδικές και συζηγείς ρίζες. Άρα

$$\Delta = b^2 - 4ac \leq 0 \Rightarrow 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 - 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \leq 0 \Rightarrow$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \qquad \blacksquare$$

Επειδή $\|\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ και $\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$, η ανισότητα των Cauchy-Schwarz γράφεται

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$$

ή

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

Θεώρημα: Αν V είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε το μέτρο $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ και η απόσταση $\mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ ικανοποιούν τις ιδιότητες:

L1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$	D1. $\mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$
L2. $\|\mathbf{u}\| = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$	D2. $\mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
L3. $\|k\mathbf{u}\| = \lvert k\rvert \|\mathbf{u}\|$	D3. $\mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathrm{d}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
L4. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$	D4. $\mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \mathrm{d}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$

Απόδειξη του L4: Έχουμε

Από την ανισότητα των Cauchy-Schwarz,

$$\left[\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right]^2 \leq 1$$

ή ισοδύναμα

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \leq 1.$$

Γνωρίζουμε ότι αν $0 \leq \theta \leq \pi$, τότε

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1.$$

Άρα υπάρχει γωνία θ έτσι ώστε

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Ορίζουμε την θ ως η **γωνία μεταξύ των διανυσμάτων u και v**.

Ορισμός: Δύο διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο καλούνται **ορθογώνια** αν ισχύει

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Παράδειγμα:

Θεώρημα (Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος): Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι ορθογώνια διανύσματα σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο, τότε

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Απόδειξη:

Παράδειγμα:

6.3 Ορθοκανονικές βάσεις

Ορισμός: Ένα σύνολο διανυσμάτων σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο καλείται **ορθογώνιο** αν όλα τα διανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Ένα ορθογώνιο σύνολο στο οποίο όλα τα διανύσματα έχουν μήκος ίσο με 1, καλείται **ορθοκανονικό**.

Παράδειγμα: Το σύνολο

$$\mathbf{u}_1 = (0,1,0), \quad \mathbf{u}_2 = (1,0,1), \quad \mathbf{u}_3 = (1,0,-1)$$

είναι ορθογώνιο επειδή

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle = 0.$$

Τώρα, $\|\mathbf{u}_1\| = 1$, $\|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{u}_3\| = \sqrt{2}$. Άρα το σύνολο

$$(0,1,0), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

είναι ορθοκανονικό.

Σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο μια βάση η οποία αποτελείται από ορθοκανονικά διανύσματα καλείται **ορθοκανονική βάση** και αν αποτελείται από ορθογώνια διανύσματα καλείται **ορθογώνια βάση**.

Θεώρημα: Αν $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση σε ένα χώρο V με εσωτερικό γινόμενο και $\mathbf{u} \in V$, τότε

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n.$$

Απόδειξη: Επειδή το σύνολο $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ είναι μια βάση, το διάνυσμα $\mathbf{u}$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\mathbf{u} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + k_n \mathbf{v}_n.$$

Άρα χρειάζεται να δείξουμε ότι

$$k_i = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Για κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}_i \in S$ έχουμε

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle \Rightarrow$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle = k_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + k_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i \rangle + \cdots + k_n\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle.$$

Επειδή S είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο, έχουμε

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \|\mathbf{v}_i\|^2 = 1, \quad \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = 0 \text{ αν } j \neq i.$$

Άρα η πιο πάνω σχέση για το $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle$ γράφεται

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle = k_i. \qquad \blacksquare$$

Σημείωση: Στην περίπτωση όπου το σύνολο S είναι ορθογώνια βάση, τότε

$$\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n.$$

Οι πραγματικοί αριθμοί

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle, \ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle, \ldots, \ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle$$

καλούνται **συντεταγμένες** του διανύσματος $\mathbf{u}$ ως προς τη βάση $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ και το διάνυσμα

$$(\mathbf{u})_S = (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle, \ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle, \ldots, \ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle)$$

καλείται **διάνυσμα συντεταγμένων** του διανύσματος $\mathbf{u}$ ως προς τη βάση S.

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 0\right), \quad \mathbf{v}_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$$

είναι μια ορθοκανονική βάση.
Να βρεθεί το διάνυσμα συντεταγμένων του διανύσματος $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$ ως προς τη πιο πάνω βάση.

Θεώρημα: Αν S είναι μια ορθοκανονική βάση ενός $n-$διάστατου χώρου με εσωτερικό γινόμενο και αν

$$(\mathbf{u})_S = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad \text{και} \quad (\mathbf{v})_S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

τότε
(i) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots u_n^2}$
(ii) $\mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$
(iii) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$

Θεώρημα: Αν $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ είναι ένα ορθογώνιο σύνολο από μη-μηδενικά διανύσματα ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο, τότε το S είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Τώρα, τα πιο κάτω αποτελέσματα θα μας βοηθήσουν να κατασκευάσουμε ορθοκανονικές βάσεις.

Θεώρημα (Θεώρημα προβολής): Αν W είναι ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης ενός χώρου V με εσωτερικό γινόμενο, τότε κάθε διάνυσμα $\mathbf{u}$ του V μπορεί να εκφραστεί ως

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2,$$

όπου $\mathbf{w}_1 \in W$ και $\mathbf{w}_2$ είναι ορθογώνιο πάνω στο W, **μόνο** με ένα τρόπο.

Το διάνυσμα $\mathbf{w}_1$ στο πιο πάνω θεώρημα καλείται **ορθογώνια προβολή** του $\mathbf{u}$ πάνω στο W και συμβολίζεται με $\mathrm{proj}_W \mathbf{u}$. Το διάνυσμα $\mathbf{w}_2$ καλείται **συνιστώσα** του $\mathbf{u}$ ορθογώνια με το W.

Θεώρημα: Έστω W ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης ενός χώρου V με εσωτερικό γινόμενο.
(i) Αν $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του W και $\mathbf{u} \in V$, τότε

$$\mathrm{proj}_W \mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle \mathbf{v}_r.$$

(ii) Αν $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ είναι μια ορθογώνια βάση του W και $\mathbf{u} \in V$, τότε

$$\mathrm{proj}_W \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle}{\|\mathbf{v}_r\|^2} \mathbf{v}_r.$$

Παράδειγμα: Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ με το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο και έστω W ο υπόχωρος που παράγεται από τα ορθοκανονικά διανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right).$$

Από το πιο πάνω θεώρημα η ορθογώνια προβολή του διανύσματος $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ πάνω στο W είναι

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_W \mathbf{u} &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 \\ &= \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right) \end{aligned}$$

Η συνιστώσα του $\mathbf{u}$ ορθογώνια με το W είναι

$$\mathbf{u} - \mathrm{proj}_W \mathbf{u} = (1, 1, 1) - \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right) = \left(\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25}\right)$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{u} - \mathrm{proj}_W \mathbf{u}$ είναι ορθογώνιο με το $\mathbf{v}_1$ και με το $\mathbf{v}_2$ και επομένως είναι ορθογώνιο με κάθε διάνυσμα του W που παράγεται από τα $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$.

Η απόδειξη του πιο κάτω θεωρήματος θα μας δώσει μια μέθοδο κατασκευής αρθοκανονικής βάσης. Αυτή η μέθοδος καλείται **διαδικασία των Gram-Schmidt**.

Θεώρημα: Κάθε μη-μηδενικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης έχει ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη: ΄Εστω V ένας μη-μηδενικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης και έστω $\{bu_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ μια βάση του V. Είναι αρκετό να δείξουμε ότι υπάρχει μια ορθογώνια βάση επειδή κάθε διάνυσμα της μπορεί να κανονικοποιηθεί για να προκύψει έτσι μια ορθοκανονική βάση. Η πιο κάτω ακολουθία βημάτων θα μας δώσει μια ορθοκανονική βάση $\{bv_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ του V.

1. Θέτουμε $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$.

2. ΄Οπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα, μπορούμε να βρούμε ένα διάνυσμα $\mathbf{v}_2$ που να είναι ορθογώνιο με το χώρο W_1 που παράγεται από το $\mathbf{v}_1$.

Επομένως

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1.$$

[Σημειώνουμε ότι αν $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, τότε το $\mathbf{v}_2$ δεν μπορεί να είναι διάνυσμα της βάσης. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβεί διότι θα είχαμε

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbf{u}_2 \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 \Rightarrow$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{u}_1$$

Δηλαδή, το $\mathbf{u}_2$ είναι πολλαπλάσιο του $\mathbf{u}_1$. Άρα τα διανύσματα $\mathbf{u}_1$ και $\mathbf{u}_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα το οποίο είναι άτοπο.]

3. Για να κατασκευάσουμε ένα διάνυσμα $\mathbf{v}_3$ το οποίο να είναι ορθογώνιο στο $\mathbf{v}_1$ και στο $\mathbf{v}_2$, βρίσκουμε τη συνιστώσα του $\mathbf{u}_3$ η οποία είναι ορθογώνια πάνω στο χώρο W_2 που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

Έχουμε

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathrm{proj}_{W_2}\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2.$$

[Όπως και στο βήμα 2, μπορεί να δειχθεί ότι $\mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$.]

4. Για να υπολογίσουμε ένα διάνυσμα $\mathbf{v}_4$ το οποίο να είναι ορθογώνιο στα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$, κατασκευάζουμε τη συνιστώσα του $\mathbf{u}_4$ η οποία είναι

ορθογώνια πάνω στο χώρο W_3 που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$. Έχουμε

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \mathrm{proj}_{W_3}\mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_4 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3.$$

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο θα κατασκευάσουμε μετά από n βήματα ένα ορθογώνιο σύνολο με διανύσματα $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Επειδή ο V είναι ένας n-διάστατος χώρος και κάθε ορθογώνιο σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο, το σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ είναι μια ορθογώνια βάση του V. ■

Παράδειγμα: Να μετασχηματιστεί η βάση

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,1), \quad \mathbf{u}_2 = (-1,1,0), \quad \mathbf{u}_3 = (1,2,1)$$

του $\mathbb{R}^3$ σε μια ορθοκανονική βάση.