Κεφάλαιο 5

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

5.1 Εισαγωγή

Ορισμός: Ένα σύνολο V καλείται **διανυσματικός χώρος** ή **γραμμικός χώρος** πάνω στον $\mathbb{R}$ αν

(α) το V είναι **κλειστό ως προς τη πρόσθεση**, δηλαδή αν $a,\ b \in V$, τότε $(a+b) \in V$ και ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα:

(i) $a+b=b+a,\ \ \forall a,\ b \in V$

(ii) $a+(b+c)=(a+b)+c,\ \ \forall a,\ b,\ c \in V$

(iii) $\exists \emptyset \in V$, το οποίον καλείται **μηδενικό στοιχείο**, τέτοιο ώστε $a+\emptyset=\emptyset+a=a,\ \ \forall a \in V$

(iv) $\forall a \in V,\ \ \exists(-a) \in V$, το οποίο καλείται **αντίθετο στοιχείο**, τέτοιο ώστε $a+(-a)=\emptyset$.

(β) το V είναι **κλειστό ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμός**, δηλαδή $\forall a \in V$ και $\forall k \in \mathbb{R}$ ορίζεται το στοιχείο $ka \in V$, το οποίο καλείται **βαθμωτό πολλαπλάσιο** του a επί το k. Επίσης ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα:

(i) $k(a+b)=ka+kb,\quad \forall k \in \mathbb{R},\ \forall a,\ b \in V$

(ii) $(k+\lambda)a=ka+\lambda a,\quad \forall k,\lambda \in \mathbb{R},\ \forall a \in V$

(iii) $k(\lambda a)=(k\lambda)a,\quad \forall k,\lambda \in \mathbb{R},\ \forall a \in V$

(iv) $1a=a,\quad \forall a \in V$

Σημειώσεις: 1. Για κάθε διανυσματικό χώρο το μηδενικό στοιχείο είναι μοναδικό.
2. Για κάθε στοιχείο $a \in V$, το αντίθετο του στοιχείο είναι μοναδικό.

Ιδιότητες: Έστω ότι V είναι ένας διανυσματικός χώρος, $a \in V$ και $k \in \mathbb{R}$, τότε
(i) $0a = \emptyset$
(ii) $k\emptyset = \emptyset$
(iii) $(-1)a = -a$
(iv) Αν $ka = \emptyset$, τότε $k = 0$ ή $a = \emptyset$.

Απόδειξη του (i): Γράφουμε

$$0a + 0a = (0+0)a \Rightarrow 0a + 0a = 0a$$

Προσθέτουμε και στα δύο μέλη $-0a$, για να βρούμε

$$[0a + 0a] + (-0a) = 0a + (-0a) \Rightarrow 0a + [0a + (-0a)] = \emptyset \Rightarrow$$

$$0a + \emptyset = \emptyset \Rightarrow 0a = \emptyset$$

Παραδείγματα διανυσματικών χώρων
1. $V = \mathbb{R}^n$. Δηλαδή, το σύνολο των διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω στον $\mathbb{R}$, επειδή
(α) αν $\mathbf{a},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ τότε $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^n$
(β) αν $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{R}$ τότε $k\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$
Επίσης ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα (ιδιότητες των διανυσμάτων).
2. Έστω ότι V είναι το σύνολο των $n \times n$ πινάκων. Θα δείξουμε ότι είναι ένας διανυσματικός χώρος στην περίπτωση όπου $n = 2$. Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

(α) Το V είναι κλειστό ως προς τη πρόσθεση επειδή

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}\in V$$

(i) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$
(ii) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$
(iii) Το μηδενικό στοιχείο είναι $\emptyset=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{A}+\emptyset=\mathbf{A}$$

(iv) Το αντίθετο στοιχείο είναι $(-\mathbf{A})=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\emptyset$$

(β) Το V είναι κλειστο ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό επειδή

$$k\mathbf{A}=k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}\in V$$

(i) $k(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)=k\mathbf{A}+k\mathbf{B}$
(ii) $(k+\lambda)\mathbf{A}=k\mathbf{A}+\lambda\mathbf{A}$
(iii) $k(\lambda\mathbf{A})=(k\lambda)\mathbf{A}$
(iv) $1\mathbf{A}=1\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\mathbf{A}$

3. Έστω ότι V είναι το σύνολο των πολυωνύμων

$$a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n,$$

όπου οι συντελεστές $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \in \mathbb{R}$. Το V είναι ένας διανυσματικός χώρος στον $\mathbb{R}$ επειδή το άθροισμα δύο πολυωνύμων είναι ίσο με πολυώνυμο και αν πολλαπλασιάσουμε ένα πολυώνυμο με ένα πραγματικό αριθμό, θα μας δώσει ένα πολυώνυμο. Επίσης τα αξιώματα ικανοποιούνται.

4. Έστω ότι V είναι το σύνολο των συναρτήσεων $f(x)$, οι οποίες είναι λύσεις των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + a(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + b(x)y = 0.$$

Έστω $f_1(x),\ f_2(x) \in V$, δηλαδή είναι λύσεις της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης,

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_1}{\mathrm{d}x^2} + a(x)\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} + b(x)f_1 = 0$$

και

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_2}{\mathrm{d}x^2} + a(x)\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x} + b(x)f_2 = 0$$

Έστω $y = f_1(x) + f_2(x)$, τότε

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(f_1 + f_2) + a(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_1 + f_2) + b(x)(f_1 + f_2) = \\
&\left(\frac{\mathrm{d}^2 f_1}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2 f_2}{\mathrm{d}x^2}\right) + a(x)\left(\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x}\right) + b(x)(f_1 + f_2) = \\
&\left(\frac{\mathrm{d}^2 f_1}{\mathrm{d}x^2} + a(x)\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} + b(x)f_1\right) + \left(\frac{\mathrm{d}^2 f_2}{\mathrm{d}x^2} + a(x)\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x} + b(x)f_2\right) = 0
\end{aligned}$$

Άρα η $(f_1(x)+f_2(x))$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης και επομένως $(f_1(x) + f_2(x)) \in V$. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι $kf_1(x) \in V$, όπου $k \in \mathbb{R}$. Τα αξιώματα ισχύουν και επομένως το σύνολο V είναι ένας διανυσματικός χώρος.

5. Το σύνολο των ορισμένων ολοκληρωμάτων στο διάστημα $[a, b]$, δηλαδή

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

είναι ένας διανυσματικός χώρος επειδή

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x$$

και

$$k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b kf(x)\mathrm{d}x$$

5.2 Διανυσματικοί υπόχωροι

Ορισμός: Ένα μη-κενό υποσύνολο W του διανυσματικού χώρου V είναι ένας **υπόχωρος** του V αν και μόνο αν ισχύουν οι συνθήκες: (α) αν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$, τότε $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \in W$ (β) αν $k \in \mathbb{R},\ \mathbf{a} \in W$, τότε $(k\mathbf{a}) \in W$

Σημείωση: Ο πιο πάνω ορισμός μπορεί να δοθεί και διαφορετικά ως εξής: Το υποσύνολο W είναι υπόχωρος του V αν και μόνο αν

$$(k\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \in W, \quad \forall k, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in W.$$

Παραδείγματα διανυσματικών υπόχωρων

1. Κάθε διανυσματικός χώρος V έχει δύο υπόχωρους, τον V και τον $\{\emptyset\}$. Κάθε άλλος υπόχωρος καλείται **γνήσιος υπόχωρος**.

2. Το $\mathbb{R}^3$ είναι ένας διανυσματικός χώρος. Το υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{w} = (\lambda, 0, \mu)$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (δηλαδή, το υποσύνολο των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ που έχουν την δεύτερη συντεταγμένη ίση με μηδέν) είναι ένας

υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ επειδή αν $\mathbf{a} = (a_1, 0, a_3)$, $(b_1, 0, b_3)$ και $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, τότε

$$(k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b}) = (k_1a_1 + k_2b_1, 0, k_1a_3 + k_2b_3) \in \mathbf{w}.$$

3. Το σύνολο των 2×2 πινάκων είναι διανυσματικός χώρος. Έστω το υποσύνολο W, είναι όλοι οι 2×2 πίνακες που έχουν τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ίσα με μηδέν. Έστω $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W$, δηλαδή,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

και $k, \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

$$k\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & ka_{12} + \lambda b_{12} \\ ka_{21} + \lambda b_{21} & 0 \end{bmatrix} \in W.$$

Άρα το υποσύνολο W είναι υπόχωρος.

4. Έστω ότι W είναι το υποσύνολο των 2×2 πινάκων των οποίων τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί. Το υποσύνολο W είναι κλειστό ως προς τη πρόσθεση επειδή το άθροισμα δύο ακεραίων είναι ακέραιος. Όμως το W δεν είναι κλειστό ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό επειδή το γινόμενο ka, όπου $k \in R$ και $a \in \mathbb{Z}$ δεν είναι κατά ανάγκη ακέραιος. Επομένως το υποσύνολο W δεν είναι υπόχωρος.

5. Το σύνολο των πολυωνύμων τρίτου βαθμού,

$$P_3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

είναι διανυσματικός χώρος. Έστω ότι W είναι το υποσύνολο του P_3 με $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Έστω $f, g \in W$, δηλαδή,

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad \text{με} \quad a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

και

$$g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \quad \text{με} \quad b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 0$$

Τώρα, αν $k, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$kf+\lambda g = (ka_0+\lambda b_0)+(ka_1+kb_1)x+(ka_2+\lambda b_2)x^2+(ka_3+\lambda b_3)x^3 \in W$$

επειδή

$$\begin{gathered}(ka_0 + \lambda b_0) + (ka_1 + kb_1) + (ka_2 + \lambda b_2) + (ka_3 + \lambda b_3) = \\ k(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + \lambda(b_0 + b_1 + b_2 + b_3) = k0 + \lambda 0 = 0.\end{gathered}$$

Άρα το υποσύνολο W είναι υπόχωρος.

5.3 Γραμμικός συνδυασμός

Ορισμός: Έστω ότι V είναι ένας διανυσματικός χώρος στον $\mathbb{R}$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Κάθε διάνυσμα $a \in V$ που γράφεται στη μορφή

$$a = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k$$

καλείται **γραμμικός συνδυασμός** των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$.

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν τα διανύσματα $(2, 2, 2)$ και $(0, 4, 5)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{a} = (0, -2, 2)$ και $\mathbf{b} = (1, 3, -1)$.

Λύση:

Ορισμός: Αν $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ είναι διανύσματα του διανυσματικού χώρου V και αν κάθε διάνυσμα στον V μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των διανυσμάτων, τότε λέμε ότι τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ **παράγουν** τον διανυσματικό χώρο V.

Παράδειγμα: Τα διανύσματα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ και $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ παράγουν τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$, επειδή κάθε διάνυσμα στον $\mathbb{R}^3$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ και $\mathbf{e}_3$. Για παράδειγμα,

$$\mathbf{a} = (1, 2, 3) = 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{b} = (-1, 0, 2) = -1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$$

Παράδειγμα: Τα πολυώνυμα $1, x, x^2, \ldots, x^n$ παράγουν τον διανυσματικό χώρο P_n (σύνολο των πολυωνύμων βαθμού $\leq n$).

Ορισμός: Αν $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ είναι διανύσματα του διανυσματικού χώρου V, τότε το σύνολο W όλων των γραμμικών συνδυασμών των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ είναι υπόχωρος του V.

5.4 Γραμμική ανεξαρτησία

Ορισμός: Αν $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων, τότε η διανυσματική εξίσωση

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \emptyset,$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον μια λύση, την

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

Αν αυτή είναι η μόνη λύση, τότε το S καλείται **γραμμικά ανεξάρτητο** σύνολο (ή θα λέμε ότι τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**). Αν υπάρχουν και άλλες λύσεις, τότε το S καλείται **γραμμικά εξαρτημένο** ή θα λέμε ότι τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ είναι **γραμμικά εξαρτημένα**).

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{(1, 0, 1), (1 - 1, 1), (2, -1, 2)\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, ενώ το σύνολο $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Λύση:

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν τα διανύσματα $2 - x + 4x^2,\ 3 + 6x + 2x^2$ και $2 + 10x - 4x^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Λύση:

Θεώρημα: Ένα σύνολο S με δύο ή περισσότερα διανύσματα είναι

(α) γραμμικά εξαρτημένο αν και μόνο αν τουλάχιστον ένα από τα διανύσματα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων διανυσμάτων,

(β) γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνο αν κανένα διάνυσμα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων διανυσμάτων.

Παράδειγμα: Από προηγούμενο παράδειγμα, τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1)$, $\mathbf{v}_3(2, -1, 2)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Για παράδειγμα είχαμε $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \emptyset$. Άρα $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

Σημειώσεις: 1. Κάθε σύνολο που περιέχει το μηδενικό διάνυσμα είναι γραμμικά εξαρτημένο.

2. Κάθε σύνολο με δύο διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένο αν και μόνο αν το ένα διάνυσμα είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

Θεώρημα: Έστω ότι $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$. Αν $k > n$, τότε το S είναι γραμμικά εξαρτημένο.

5.5 Βάση και διάσταση

Ορισμός: Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος και $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ είναι ένα σύνολο με διανύσματα του V, τότε το S καλείται **βάση** του V αν οι πιο κάτω συνθήκες ισχύουν: (α) Το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(β) Το σύνολο S παράγει τον διανυσματικό χώρο V.

Θεώρημα: Αν $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου V, τότε κάθε $\mathbf{a} \in V$ μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$\mathbf{a} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

μόνο με ένα τρόπο. (Δηλαδή, οι σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$ είναι μοναδικά ορισμένες.)

Στο πιο πάνω θεώρημα οι σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$ καλούνται **συντεταγμένες** ως προς τη βάση $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Το διάνυσμα $\mathbf{v}_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ καλείται **διάνυσμα συντεταγμένων** του V ως προς τη βάση S.

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου M_{22} (σύνολο των 2×2 πινάκων).

Λύση:

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι συντεταγμένες του πολυωνύμου $u = 2t^2 - 5t + 6$ ως προς τη βάση

$$\mathrm{e}_1 = 1, \quad \mathrm{e}_2 = t - 1, \quad \mathrm{e}_3 = (t-1)^2$$

Λύση:

Ορισμός: Αν ο διανυσματικός χώρος V έχει μια βάση με n διανύσματα, τότε ο αριθμός n καλείται **διάσταση** του V και γράφουμε

$$\mathrm{dim} V = n.$$

Σημειώσεις: 1. Όλες οι βάσεις του V έχουν τον ίδιον αριθμό διανυσμάτων.

2. Ένα σύνολο με n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα είναι βάση.

3. Αν $\mathrm{dim} V = n$, τότε οποιαδήποτε $m > n$ διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.