Κεφάλαιο 4

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

4.1 Εισαγωγή (Γεωμετρική)

Σε διάφορες φυσικές εφαρμογές υπάρχουν μεγέθη τα οποία μπορούν να χαρακτηρισθούν μόνο με ένα αριθμό. Τέτοια μεγέθη, όπως για παράδειγμα, η θερμοκρασία ενός σώματος, η μάζα ενός σώματος, η απόσταση μεταξύ δύο σημείων, καλούνται **αριθμητικά** ή **βαθμωτά** ή **μονόμετρα** μεγέθη.

Έστω ότι έχουμε την ευθεία (ϵ) και τα σημεία Α και Β πάνω στην ευθεία. Η ευθεία (ϵ) έχει την ίδια διεύθυνση με όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες με αυτή. Το ευθύγραμμο τμήμα AB ορίζει ένα **διάνυσμα**, το οποίο συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$ ή με ένα μικρό γράμμα και ένα βέλος, για παράδειγμα, $\overrightarrow{a}$. Επίσης συνηθίζεται και ο συμβολισμός $\mathbf{a}$.

Το σημείο A καλείται **αρχή** του διανύσματος (αρχικό σημείο) και το B καλείται **πέρας** του διανύσματος (τελικό σημείο). Και τα δύο σημεία καλούνται **πέρατα** του διανύσματος.

Για κάθε διάνυσμα διακρίνουμε τα εξής:

(i) τη **διεύθυνση** του, η οποία καθορίζεται από την ευθεία που διέρχεται από τα πέρατα,

(ii) τη **φορά** του, από το αρχικό σημείο στο τελικό σημείο,

(iii) τη **μήκος** του, που είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα πέρατα.

Η διεύθυνση και η φορά του διανύσματος ορίζουν την έννοια της **κατεύθυνσης**. Δηλαδή, κάθε ευθεία έχει δύο κατευθύνσεις.

Δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ καλούνται **ίσα** όταν είναι επί τα αυτά. Δηλαδή, το A συμπίπτει με το C και το B συμπίπτει με το D. Τα διανύσματα για τα οποία ισχύει αυτή η ισότητα καλούνται **εφαρμοστά** ή **δεσμευμένα** διανύσματα.

Δύο παράλληλα διανύσματα καλούνται **ομόρροπα** όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και **αντίρροπα** όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση. Γενικεύοντας την πιο πάνω έννοια της ισότητας, λέμε ότι δύο διανύσματα είναι **ίσα** αν (α) είναι ομόρροπα και (β) έχουν ίσα μήκη. Τα διανύσματα για τα οποία ισχύει αυτή η ισότητα καλούνται **ελεύθερα** διανύσματα.

Διανύσματα που είναι αντίρροπα και έχουν ίσα μήκη καλούνται **αντίθετα** διανύσματα. Συμβολίζουμε το αντίθετο διάνυσμα του $\mathbf{a}$ με $-\mathbf{a}$.

Πρόσθεση διανυσμάτων: Αν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι δύο διανύσματα, τότε το άθροισμα $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ είναι ένα διάνυσμα που προκύπτει ως εξής: Τοποθετούμε το διάνυσμα $\mathbf{b}$ με τέτοιο τρόπο ώστε η αρχή του να ταυτίζεται με το πέρας του $\mathbf{a}$. Το διάνυσμα $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ έχει ως αρχή την αρχή του $\mathbf{a}$ και ως πέρας το πέρας του $\mathbf{b}$.

Διαφορά διανυσμάτων: Αν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι δύο διανύσματα, τότε η διαφορά $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}).$$

Μηδενικό διάνυσμα: Το διάνυσμα με μήκος ίσο με το μηδέν καλείται **μηδενικό διάνυσμα** και συμβολίζεται με $\mathbf{0}$. Ορίζουμε

$$\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$$

και

$$\mathbf{a}-\mathbf{a}=\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}.$$

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός: Αν $\mathbf{a}$ είναι ένα μη-μηδενικό διάνυσμα και k είναι μη-μηδενικός πραγματικός αριθμός, τότε το γινόμενο $k\mathbf{a}$ ορίζεται ως το διάνυσμα που έχει μήκος $|k|$ φορές το μήκος του $\mathbf{a}$ και έχει την κατεύθυνση του $\mathbf{a}$ αν $k>0$ και αντίθετη του $\mathbf{a}$ αν $k<0$. Επίσης ορίζουμε $k\mathbf{a}=\mathbf{0}$ αν $k=0$ ή $\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

4.2 Διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Αν n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, τότε μια **διατεταγμένη** n**-άδα** είναι μια ακολουθία από πραγματικούς αριθμούς $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Το σύνολο όλων των n-άδων καλείται n-**διάστατος χώρος** και συμβολίζεται με $\mathbb{R}^n$.

Ειδικότερα η n-άδα $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ορίζει ένα σημείο ή ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Για παράδειγμα, στον $\mathbb{R}^3$ έχουμε

Έστω το διάνυσμα $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Οι πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$ καλούνται **συντεταγμένες** του $\mathbf{a}$.

Ορισμός: Δύο διανύσματα $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ίσα αν

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots,\ a_n = b_n.$$

Το άθροισμα $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ορίζεται ως

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

και αν k είναι πραγματικός αριθμός, τότε ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός $k\mathbf{a}$ ορίζεται ως

$$k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n).$$

Ιδιότητες των διανυσμάτων

Με βάση το άθροισμα των διανυσμάτων έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:
Αν $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, τότε

1. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ [Προσεταιριστική ιδιότητα]
2. $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$ [Αντιμεταθετική ιδιότητα]
3. $\mathbf{a}+\mathbf{O} = \mathbf{a}$ [΄Υπαρξη του ουδέτερου στοιχείου, το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{O} = (0, 0, \ldots, 0)$]
4. $\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = 0$ [΄Υπαρξη αντίθετου διανύσματος]

Με βάση το βαθμωτό πολλαπλασιασμό έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:
Αν $\mathbf{a},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ και $k,\ \lambda \in \mathbb{R}$, τότε

1. $k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$
2. $(k+\lambda)\mathbf{a} = k\mathbf{a}+\lambda\mathbf{a}$
3. $(k\lambda)\mathbf{a} = k(\lambda\mathbf{a})$
4. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

Εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός: Αν $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ είναι δύο διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε το **(Ευκλείδειο) εσωτερικό γινόμενο** ορίζεται ως

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Συνηθίζεται να αναφερόμαστε στον $\mathbb{R}^n$ μαζί με τις πράξεις της πρόσθεσης, του βαθμωτού πολλαπλασιασμού και του εσωτερικού γινομένου ως **Ευκλείδειος χώρος** n **διαστάσεων**.

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου: Αν $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ και $k \in \mathbb{R}$, τότε

1. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$
2. $(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
4. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ και $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{a} = 0$.

Σημείωση: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{R}$

Μήκος και απόσταση στον $\mathbb{R}^n$: Έστω ότι $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ και $\mathbf{b}(b_1, b_2, \dots b_n)$. Η **απόσταση** μεταξύ των σημείων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι ίση με

$$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}.$$

Το μήκος του διανύσματος $\mathbf{a}$ είναι ίσο με

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Μοναδιαίο διάνυσμα: Το διάνυσμα $\mathbf{e}$ καλείται **μοναδιαίο** αν $\|\mathbf{e}\| = 1$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, το διάνυσμα $\mathbf{e}_\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα και έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{a}$. Για παράδειγμα, αν $\mathbf{a} = (2, 1, 3)$, τότε $\mathbf{e}_\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \dfrac{(2,1,3)}{\sqrt{4+1+9}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{1}{\sqrt{14}}, \dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$. Αυτή η διαδικασία καλείται **κανονικοποίηση**.

Ανισότητα των Cauchy-Schwaartz: Αν $\mathbf{a},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})$$

ή

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2$$

Άρα

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$$

Από αυτή τη σχέση βρίσκουμε

$$\frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} \leq 1$$

Άρα υπάρχει γωνία θ τέτοια ώστε

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} \quad \text{και} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Ορίζουμε την θ ως την γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

Παράδειγμα: Έστω $\mathbf{a} = (4,1,2,3)$, $\mathbf{b} = (0,3,8,-2)$, $\mathbf{c} = (3,1,2,2)$. Να υπολογιστούν τα εξής:

(i) $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|$ (ii) $\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ (iii) $\|-2\mathbf{a}\| + 2\|\mathbf{a}\|$

(iv) $\|3\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + \mathbf{c}\|$ (v) $\frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|}$ (vi) $\left\|\frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|}\right\|$

Λύση:

Παράδειγμα: Να αποδειχθεί ότι
(i) $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = 2\|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{b}\|^2$
(ii) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{4}\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2$

Λύση: