Κεφάλαιο 3

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

3.1 Εισαγωγή

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα $\mathbf{A}$ αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός ο οποίος καλείται **ορίζουσα** και συνήθως συμβολίζεται με $|\mathbf{A}|$ ή $\det(\mathbf{A})$.

Μεταθέσεις: Μια απεικόνιση του συνόλου $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ πάνω στον εαυτό του η οποία είναι ένα προς ένα καλείται **μετάθεση**. Για παράδειγμα, το σύνολο $\{1, 2, 3\}$ έχει τις εξής μεταθέσεις: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Για κάθε σύνολο με n στοιχεία υπάρχουν $n!$ μεταθέσεις. Λέμε ότι δύο στοιχεία της μετάθεσης παρουσιάζουν **παράβαση** αν ο μεγαλύτερος αριθμός βρίσκεται στα αριστερά του μικρότερου. Αν ο αριθμός των παραβάσεων είναι άρτιος λέμε ότι η παράβαση είναι **άρτια**, ενώ αν ο αριθμός των παραβάσεων είναι περιττός λέμε ότι η παράβαση είναι **περιττή**. Για παράδειγμα, η μετάθεση 35142 παρουσιάζει 6 παραβάσεις: $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(5, 1)$, $(5, 4)$, $(5, 2)$ $(4, 2)$. Άρα η μετάθεση είναι άρτια.

Ορίζουσα n-στής τάξης: Έστω ότι έχουμε τον τετραγωνικό πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

και την αντίστοιχη του ορίζουσα

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Η **τιμή** (ή **ανάπτυγμα**) της ορίζουσας είναι ίση με το άθροισμα όλων των γινομένων των n στοιχείων που μπορούν να σχηματιστούν με όλους τους δυνατούς τρόπους έτσι ώστε να ανήκουν σε διαφορετικές γραμμές και στήλες. Κάθε γινόμενο, το οποίο καλείται **όρος της ορίζουσας**, έχει θετικό πρόσημο αν η μετάθεση των δεικτών των στηλών είναι άρτια και έχει αρνητικό πρόσημο αν η μετάθεση των δεικτών των στηλών είναι περιττή.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η τιμή της ορίζουσας τρίτης τάξης

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Όρος	Μετάθεση δεικτών των στηλών	Αριθμός παραβάσεων	Πρόσημο του όρου
$a_{11}a_{22}a_{33}$	123	0	+
$a_{12}a_{23}a_{31}$	231	2	+
$a_{13}a_{21}a_{32}$	312	2	+
$a_{13}a_{22}a_{31}$	321	3	-
$a_{12}a_{21}a_{33}$	213	1	-
$a_{11}a_{23}a_{32}$	132	1	-

Επομένως

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Ανάλογα για την ορίζουσα δεύτερης τάξης έχουμε

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Κανόνας του Sarrus: Εφαρμόζεται **μόνο** για ορίζουσες τρίτης τάξης.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η τιμή της ορίζουσας με τη χρήση του κανόνα του Sarrus

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

Λύση:

3.2 Ιδιότητες των οριζουσών

1. Αν σε μια ορίζουσα εμφανίζεται μηδενική γραμμή (ή στήλη), τότε η τιμή της είναι ίση με μηδέν.

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \\ a_3 & 0 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

2. Αν σε μια ορίζουσα τα στοιχεία της πάνω (ή κάτω) από την κύρια διαγώνιο είναι όλα ίσα με μηδέν, τότε η τιμή της είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & 0 \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \end{vmatrix} = a_1 a_3 a_6 a_{10}$$

3. Αν πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή (ή στήλη) με μια σταθερά, τότε και η τιμή της ορίζουσας πολλαπλασιάζεται με την ίδια σταθερά. Ως συνέπεια αυτής της ιδιότητας, αν μια γραμμή (ή στήλη) έχει κοινό

παράγοντα k, τότε το k μπορεί να γραφεί έξω από την ορίζουσα ως παράγοντας της.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

4. Αν σε μια ορίζουσα αντιμεταθέσουμε δύο γραμμές (ή δύο στήλες), τότε η τιμή της ορίζουσας αλλάζει πρόσημο

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. Αν σε μια γραμμή (ή στήλη) προσθέσουμε μια άλλη γραμμή (ή στήλη) πολλαπλασιασμένη με σταθερά, τότε η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & a_2 + \lambda b_2 & a_3 + \lambda b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

6. Αν τα στοιχεία μιας γραμμής (ή στήλης) είναι αθροίσματα n αριθμών, τότε η ορίζουσα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα n οριζουσών.

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

7. Η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει αν ιο γραμμές γίνουν στήλες και οι στήλες γίνουν γραμμές.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Από τη τελευταία ιδιότητα προκύπτει ότι

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A}).$$

Επίσης ισχύει η ιδιότητα

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}).$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το ανάπτυγμα των παρακάτω οριζουσών:

$$\text{(i)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{(iv)} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \qquad \text{(v)} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{(vi)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

Λύση:

3.3 Υπολογισμός ανπτύγματος ορίζουσας με απαλοιφή του Gauss

Η μέθοδος του Gauss (Gaussian elimination) βασίζεται στην ιδιότητα 2 (δηλαδή, αν τα στοιχεία της ορίζουσας πάνω (ή κάτω) από την κύρια διαγώνιο είναι όλα ίσα με μηδέν, τότε η τιμή της είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου). Επομένως με βάση τις υπόλοιπες ιδιότητες (κυρίως των ιδιοτήτων 4 και 5), θα γράφουμε την ορίζουσα στη μορφή όπου όλα τα στοιχεία κάτω (ή πάνω) από την κύρια διαγώνιο είναι ίσα με μηδέν. Αν κατά τη διαδικασία χρησιμοποιήσουμε r αντιμεταθέσεις γραμμών, τότε η τιμή της ορίζουσας είναι ίση με

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^r \times \text{γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου}$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί η τιμή της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 9 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Λύση:

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί η τιμή της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Λύση:

3.4 Ανάπτυγμα ορίζουσας κατά τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης

Ελάσσων - Αλγεβρικό συμπλήρωμα: Αν σε μια ορίζουσα n-στης τάξης διαγράψουμε τη γραμμή i και τη στήλη j, τότε προκύπτει μια νέα ορίζουσα $(n-1)$ τάξης που καλείται **ελάσσων ορίζουσα** του στοιχείου a_{ij} και συμβολίζεται με M_{ij}. Το γινόμενο $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ καλείται **αλγεβρικό συμπλήρωμα** ή **συντελεστής** του στοιχείου a_{ij}.

Παράδειγμα:

Παρατηρούμε ότι ισχύει $C_{ij} = M_{ij}$ αν $(i+j)$ είναι άρτιος και $C_{ij} = -M_{ij}$ αν $(i+j)$ είναι περιττός.

Ανάπτυγμα της ορίζουσας: Η τιμή μιας ορίζουσας είναι ίση με το άθροισμα των γινομένων που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό όλων των στοιχείων μιας γραμμής (ή στήλης) με το αντίστοιχο τους αλγεβρικό συμπλήρωμα.

Παράδειγμα: Να υπολογιτουν οι τιμές των πιο κάτω οριζουσών:

$$\text{(i)} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

3.5 Τύπος του αντίστροφου πίνακα

Ο τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{A}$ καλείται **ομαλός** αν $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ και **μη-ομαλός** (ή **ιδιάζων**) αν $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Θεώρημα: Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι ομαλός.

Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $\mathbf{A}$ ισχύει

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}.$$

Ορισμός: Ο **συμπληρωματικός πίνακας** του $n \times n$ πίνακα $\mathbf{A}$ ορίζεται ως

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

όπου C_{ij} είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij}.

Σημείωση: Το στοιχείο A_{ij} του πίνακα $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ βρίσκεται στην j γραμμή και στην i στήλη.

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο συμπληρωματικός πίνακας του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Λύση:

Ορισμός (τύπος του $\mathbf{A}^{-1}$): Αν ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathrm{adj}(\mathbf{A}).$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Λύση:

3.6 Κανόνας του Cramer

Έστω ότι έχουμε το γραμμικό σύστημα με n εξισώσεις και n αγνώστους

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & & . & & & & . & & . \\ . & & . & & & & . & & . \\ . & & . & & & & . & & . \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Συμβολίζουμε με Δ την ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

και με Δ_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ την ορίζουσα που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τη στήλη i της Δ με τη στήλη $[b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$. Για παράδειγμα,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Θεώρημα: Το πιο πάνω σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\Delta \neq 0$. Σε αυτή τη περίπτωση η μοναδική λύση είναι

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Στη περίπτωση όπου $\Delta = 0$, το σύστημα

(i) έχει άπειρες λύσεις αν $\Delta_i = 0$ για όλες τις τιμές του i.

(ii) είναι μη-συμβιβαστό αν $\Delta_i \neq 0$ για τουλάχιστον ένα i.

Στη περίπτωση όπου το σύστημα είναι ομογενές (δηλαδή, $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$), τότε

(i) αν $\Delta \neq 0$ το σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση.

(ii) αν $\Delta = 0$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 & = & 10 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

Λύση:

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & = & 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 & = & -8 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 & = & 10 \end{array}$$

Λύση:

Παράδειγμα: Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k τέτοια ώστε το πιο κάτω σύστημα να έχει μη μηδενική λύση.

$$\begin{aligned} 2x - 6y &= 0 \\ 5x + ky &= 0 \end{aligned}$$

Λύση: