Κεφάλαιο 2

ΠΙΝΑΚΕΣ

2.1 Εισαγωγή

Οι Α, Β, Γ, Δ, Ε είναι φοιτητές του Πανεπιστημίου Κύπρου. Το πρώτο εξάμηνο είχαν τα εξής αποτελέσματα:

	Οικονομικά	Πληροφορική	Φυσική	Μαθηματικά
Α	9	9	10	5
Β	9	8	10	4
Γ	8	7	9	4
Δ	8	9	9	5
Ε	7	8	9	3

Αυτές οι πληροφορίες μπορούν να γραφούν σε ορθογώνια διάταξη (τοποθέτηση) με 5 γραμμές και 4 στήλες.

$$\begin{bmatrix} 9 & 9 & 10 & 5 \\ 9 & 8 & 10 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 4 \\ 8 & 9 & 9 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Αυτή η τοποθέτηση καλείται πίνακας 5×4, όπου 5 είναι αριθμός των γραμμών και 4 είναι ο αριθμός των στηλών. Γενικά, έχουμε

Ορισμός: Μια διάταξη στοιχείων σε μορφή ορθογωνίου σχήματος

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

όπου $a_{ij} \in \mathbb{R}$, καλείται **πίνακας** πάνω στον $\mathbb{R}$ (ή απλά πίνακας).

Οι m οριζόντιες n-άδες

$$[a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}], \; [a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}], \dots, \; [a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}]$$

είναι οι **γραμμές** του πίνακα και οι n κατακόρυφες m-άδες

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

είναι οι **στήλες** του πίνακα.

Ένας πίνακας με m γραμμές και n στήλες καλείται $m \times n$ πίνακας, όπου $m \times n$ καλείται η **διάσταση** του πίνακα. Το στοιχείο που βρίσκεται στη τομή της γραμμής i και της στήλης j, γράφεται a_{ij}. Για παράδειγμα, το στοιχείο a_{23} βρίσκεται στη δεύτερη γραμμή και στη τρίτη στήλη. Ο πίνακας μπορεί να γραφεί και σύντομα $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.

2.2 Είδη πινάκων

1. Ο πίνακας που έχει μια γραμμή καλείται **πίνακας γραμμή**. Για παράδειγμα,

$$\mathbf{A} = [2, 3, 4, 5].$$

2. Ο πίνακας που έχει μια στήλη καλείται **πίνακας στήλη**. Για παράδειγμα,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3. Ένας πίνακας που έχει όλα του τα στοιχεία ίσα με μηδέν, καλείται **μηδενικός πίνακας**.

4. Ένας πίνακας που έχει n γραμμές και n στήλες καλείται **τετραγωνικός** $n \times n$ (ή τετραγωνικός n-στής τάξης). Η γενική μορφή ενός τετραγωνικού πίνακα είναι

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία $a_{11},\ a_{22},\ \dots,\ a_{nn}$ αποτελούν τα στοιχεία της **κύριας διαγωνίου**

5. Ένας τετραγωνικός πίνακας που έχει όλα του τα στοιχεία ίσα με μηδέν, εκτός από τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου, δηλαδή όταν έχει την μορφή

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

καλείται **διαγώνιος πίνακας**. Στην περίπτωση όπου $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$, ο πίνακας καλείται **μοναδιαίος** ή **ταυτοτικός** πίνακας και συμβολίζεται με $\mathbf{I}_n$ (ή απλά $\mathbf{I}$).

2.3 Άλγεβρα πινάκων

Ισότητα πινάκων: Αν $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας και $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ είναι ένας $p \times q$ πίνακας, τότε $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ αν και μόνο αν $p = m,\ q = n$ και $a_{ij} = b_{ij}$ γιά όλες τις τιμές των i και j.

Πρόσθεση πινάκων: Αν $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας και $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ είναι ένας $p \times q$ πίνακας, τότε η πρόσθεση $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ορίζεται αν και μόνο αν $p = m$ και $q = n$. Το άθροισμα είναι ίσο με

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}],$$

όπου $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας.

Παράδειγμα: Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Τα αθροίσματα $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ και $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ δεν ορίζονται, ενώ

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1+3 & 3+1 & 5+2 \\ 2+4 & 4+1 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός: Αν $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας και k είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε ο πίνακας

$$k\mathbf{A} = [ka_{ij}]$$

είναι ένας $m \times n$ πίνακας που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας κάθε στοιχείο του $\mathbf{A}$ με το k.

Παράδειγμα: Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

τότε

$$\begin{aligned} 7\mathbf{A} + 2\mathbf{B} &= 7\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 28 & 28 & 7 \\ 21 & 7 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 30 & 7 \\ 25 & 13 & 18 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν σταθερές $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \lambda_4$ τέτοιες ώστε

$$\lambda_1\mathbf{A} + \lambda_2\mathbf{B} + \lambda_3\mathbf{C} + \lambda_4\mathbf{D} = \mathbf{E}.$$

Λύση:

Πολλαπλασιασμός πινάκων: Έστω ο $m \times p$ πίνακας $\mathbf{A}$ και ο $q \times n$ πίνακας $\mathbf{B}$. Λέμε ότι οι πίνακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι **συμβιβαστοί** (ως προς τον πολλαπλασιασμό) αν ο αριθμός των στηλών του $\mathbf{A}$ είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του $\mathbf{B}$. Δηλαδή, $p = q$. Ορίζουμε ως το γινόμενο των συμβιβαστών πινάκων $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$, ένα πίνακα $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ ο οποίος έχει διάσταση $m \times n$. Κάθε στοιχείο c_{ij} είναι το άθροισμα των γινομένων των p στοιχείων της i-γραμμής του πίνακα $\mathbf{A}$ με τα αντίστοιχα στοιχεία της j-στήλης του πίνακα $\mathbf{B}$. Δηλαδή,

$$\boxed{\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \end{aligned}}$$

Ο πίνακας $\mathbf{C}$ έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών με τον $\mathbf{A}$ και έχει τον ίδιο αριθμών στηλών με τον $\mathbf{B}$.

Στον πολλαπλασιασμό πινάκων είναι δυνατόν να έχουμε $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, με $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ και $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$, όπου $\mathbf{O}$ είναι μηδενικός πίνακας.

Παράδειγμα: Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί τα γινόμενα $\mathbf{AB}$ και $\mathbf{BA}$.

Λύση:

Παράδειγμα: Έστω

$$\mathbf{A} = [1, 2, 3],\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστούν: **AC**, **CA**, **AD**, **AE**, **BD**, **DB**, **AF**, **EF**, **FE**.

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων:
(i) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
(ii) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$
(iii) $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA}+\mathbf{CA}$
(iv) $k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}), \quad k \in \mathbb{R}$
(v) $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$
Στο γινόμενο πινάκων δεν ισχύει γενικά η αντιμεταθετική ιδιότητα,

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

2.4 Είδη πινάκων (συνέχεια)

Ανάστροφος ενός πίνακα $\mathbf{A}$ καλείται ο πίνακας που έχει γραμμές τις στήλες του $\mathbf{A}$ και στήλες τις γραμμές του $\mathbf{A}$ και συμβολίζεται με $\mathbf{A}^T$. Για παράδειγμα, οι ανάστροφοι των πινάκων

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

είναι

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Συμμετρικός πίνακας είναι ο τεραγωνικός πίνακας $\mathbf{A}$ με $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ και **αντισυμμετρικός πίνακας** είναι ο τεραγωνικός πίνακας $\mathbf{A}$ με $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$.

Ορθογώνιος πίνακας είναι ο τεραγωνικός πίνακας $\mathbf{A}$ ο οποίος ικανοποιεί την ιδιότητα

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}.$$

Άνω τριγωνικός είναι ο τεραγωνικός πίνακας ο οποίος έχει όλα τα στοιχεία του κάτω από την κύρια διαγώνιο ίσα με μηδέν.

Κάτω τριγωνικός είναι ο τεραγωνικός πίνακας ο οποίος έχει όλα τα στοιχεία του πάνω από την κύρια διαγώνιο ίσα με μηδέν.

Ορισμός: Ορίζουμε ως **ίχνος** ενός τεραγωνικού πίνακα $\mathbf{A}$ το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου και συμβολίζεται με $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$.

Για παράδειγμα, το ίχνος του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

είναι

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 1 + 5 + 9 = 15.$$

Ιδιότητες του ανάστροφου πίνακα

(i) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

(ii) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = A^T + B^T$

(iii) $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$

(iv) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

2.5 Αντίστροφος πίνακας

Αν $\mathbf{A}$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας, τότε ένας $n \times n$ πίνακας $\mathbf{B}$ καλείται **αντίστροφος** του $\mathbf{A}$ αν ισχύει

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

ο αντίστροφος ενός πίνακα $\mathbf{A}$ είναι μοναδικός και συμβολίζεται με $\mathbf{A}^{-1}$. Δηλαδή,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Ένας πίνακας που έχει αντίστροφο καλείται **αντιστρέψιμος πίνακας**, και αν δεν έχει αντίστροφο καλείται **μη-αντιστρέψιμος πίνακας**.
Έστω

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{array}\right],$$

τότε

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{rr} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right]$$

επειδή

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rr} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 28-27 & -21+21 \\ 36-36 & -27+28 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right].$$

Γενικά, εύκολα αποδυκνείεται ότι για κάθε 2×2 πίνακα

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} a & c \\ b & d \end{array}\right]$$

έχουμε

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \left[\begin{array}{rr} d & -c \\ -b & a \end{array}\right]$$

με την προϋπόθεση ότι $ad - bc \neq 0$.

Θεώρημα: Αν $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε ο πίνακας $\mathbf{AB}$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Γενικά,

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_n)^{-1} = \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\ldots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$$

Δυνάμεις πίνακα: Αν $\mathbf{A}$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας, τότε ορίζουμε

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I},\ \mathbf{A}^m = \mathbf{A}\mathbf{A}\ldots\mathbf{A},\ \mathbf{A}^{-m} = (\mathbf{A}^{-1})^m = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\ldots\mathbf{A}^{-1},\ m > 0.$$

Θεώρημα: Αν $\mathbf{A}$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας και $r,\ s$ είναι ακέραιοι, τότε

$$\mathbf{A}^r\mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s} \quad \text{και} \quad (\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{rs}.$$

2.6 Ισοδυναμία πινάκων - Υπολογισμός του $\mathbf{A}^{-1}$

Ορισμός: Ένας πίνακας $\mathbf{B}$ καλείται **ισοδύναμος** (ή R-ισοδύναμος) με τον πίνακα $\mathbf{A}$ αν και μόνο αν ο $\mathbf{B}$ προκύπτει από τον $\mathbf{A}$ με εκτέλεση σε αυτόν μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών. Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 14 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

είναι R-ισοδύναμος με τον

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 14 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

επειδή ο $\mathbf{B}$ προκύπτει από τον $\mathbf{A}$ αν εφαρμόσουμε τους μετασχηματισμούς:

$$R_2 \to R_2 - 2R_1,\quad R_3 \to R_3 - R_1,\quad R_4 \to R_4 + R_1.$$

Θα συμβολίζουμε την ισοδυναμία πινάκων με $\sim$.

Υπολογισμός του $\mathbf{A}^{-1}$: Για να βρούμε τον αντίστροφο ενός (αντιστρέψιμου) πίνακα $\mathbf{A}$, πρέπει να βρούμε μια ακολουθία μετασχηματισμών γραμμών που ανάγει τον πίνακα $\mathbf{A}$ σε ταυτοτικό ($\mathbf{I}$) και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε την ίδια ακολουθία μετασχηματισμών πάνω στον $\mathbf{I}$, Για να μας δώσει τον $\mathbf{A}^{-1}$. Αν οι μετασχηματισμοί γίνουν ταυτόχρονα πάνω στον $\mathbf{A}$ και στον $\mathbf{I}$, τότε θα έχουμε

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \sim [\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}].$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο $\mathbf{A}^{-1}$ του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο $\mathbf{A}^{-1}$ του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Σημείωση: Αν κατά τη διαδικασία των μετασχηματισμών εμφανιστεί μηδενική γραμμή (ή στήλη) στον ισοδύναμο του $\mathbf{A}$, τότε ο $\mathbf{A}$ είναι μη-αντιστρέψιμος.

2.7 Γραμμικά συστήματα

Το γραμμικό σύστημα με n εξισώσεις και n αγνώστους

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
. & & . & & & & . & & . \\
. & & . & & & & . & & . \\
. & & . & & & & . & & . \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

γράφεται σε μορφή πινάκων,

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

Έστω ότι ο $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος. Δηλαδή, ο $\mathbf{A}^{-1}$ υπάρχει. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της πιο πάνω εξίσωσης με $\mathbf{A}^{-1}$, για να βρούμε

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{IX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \Rightarrow$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 17 \\ x_2 - 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Λύση:

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο πίνακας $\mathbf{X}$ τέτοιος ώστε

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B},$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Λύση: