Κεφάλαιο 1

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1.1 Εισαγωγή

Γραμμική εξίσωση: Ορίζουμε μια **γραμμική εξίσωση** ως προς n μεταβλητές, $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$, κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

όπου $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n,\ b$ είναι πραγματικές σταθερές. Οι μεταβλητές καλούνται $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$ **άγνωστοι**.

Γραμμικά συστήματα: Καλούμε **σύστημα γραμμικών εξισώσεων** ή απλά **γραμμικό σύστημα** ένα πεπερασμένο σύνολο γραμμικών εξισώσεων. Καλούμε **λύση** του συστήματος μια ακολουθία αριθμών $\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\ \lambda_n$ αν $x_1 = \lambda_1,\ x_2 = \lambda_2,\ldots,\ x_n = \lambda_n$ ικανοποιούν κάθε εξίσωση του συστήματος. Για παράδειγμα, το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 1 \\ x + 2y - 2z &= 5 \end{aligned}$$

έχει λύση $x = 3,\ y = 2,\ z = 1$ επειδή αυτές οι τιμές ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις του συστήματος.

Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει τουλάχιστον μια λύση, τότε καλείται **συμβιβαστό**, ενώ στην περίπτωση που δεν έχει λύση καλείται **μη συμβιβαστό**.

Έστω ότι έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Από την Αναλυτική Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι οι δύο εξισώσεις παριστάνουν δύο ευθείες στο επίπεδο. Τώρα, για τις δύο ευθείες μπορεί να συμβαίνει ένα από τα πιο κάτω

(i) οι δύο ευθείες είναι παράλληλες,

(ii) οι δύο ευθείες τέμενονται,

(iii) οι δύο ευθείες ταυτίζονται.

Επομενως για την κάθε περίπτωση έχουμε τα πιο κάτω αποτελέσματα:

(i) το σύστημα δεν έχει λύση,

(ii) το σύστημα έχει μια λύση,

(iii) το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Γενικά, για κάθε γραμμικό σύστημα ισχύει ένα από τα ακόλουθα: δεν έχει λύση ή έχει μια λύση ή έχει άπειρες λύσεις.

Επαυξημένος πίνακας: Κάθε γραμμικό σύστημα με m γραμμικές εξισώσεις και n αγνώστους,

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & & . & & & & . & & . \\ . & & . & & & & . & & . \\ . & & . & & & & . & & . \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

μπορεί να γραφεί ως μια ορθογώνια διάταξη με m γραμμές και $n+1$ στήλες

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

η οποία καλείται **επαυξημένος πίνακας**. Για παράδειγμα ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = & 15 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 & = & 24 \end{array}$$

είναι

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \end{array}\right]$$

Γνωρίζουμε ότι ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων δεν αλλάζει αν εκτελέσουμε τις πιο κάτω πράξεις:

(i) Εναλλαγή δύο εξισώσεων

(ii) Πολλαπλασιασμός μιας εξίσωσης με μια σταθερά διαφορετική του μηδενός.

(iii) Πρόσθεση σε μια εξίσωση μια άλλη εξίσωση πολλαπλασιασμένη με μια μη μηδενική σταθερά.

Επειδή κάθε εξίσωση του συστήματος αντιστοιχεί σε μια γραμμή του επαυξημένου πίνακα, οι πιο πάνω πράξεις μπορούν να εφαρμοστούν πάνω στον επαυξημένο πίνακα.

(i) Εναλλαγή δύο γραμμών: $R_i \leftrightarrow R_j$
(ii) Πολλαπλασιασμός όλων των στοιχείων μιας γραμμής επί τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό, λ: $R_i \to \lambda R_i$
(iii)Πρόσθεση στα στοιχεία μιας γραμμής τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής πολλαπλασιασμένα επί ένα μη μηδενικό αριθμό, λ: $R_i \to R_i + \lambda R_j$

Αυτές οι πράξεις καλούνται **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί (πράξεις) γραμμών**.

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x - 2y + 3z &= 6 \\ 2x + y - 2z &= -2 \end{aligned}$$

Λύση:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x - 2y + 3z &= 6 \\ 2x + y - 2z &= -2 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

Προσθέτουμε στη δεύτερη εξίσωση τη πρώτη πολλαπλασιασμένη με (-1) $R_2 \to R_2 - R_1$

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ -3y+2z &= 0 \\ 2x+y-2z &= -2 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

Προσθέτουμε στη τρίτη εξίσωση τη πρώτη πολλαπλασιασμένη με (-2) $R_3 \to R_3 - 2R_1$

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ -3y+2z &= 0 \\ -y-4z &= -14 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right]$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση επί $-\frac{1}{3}$ $R_2 \to -\frac{1}{3}R_2$

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ y-\tfrac{2}{3}z &= 0 \\ -y-4z &= -14 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right]$$

Προσθέτουμε στη πρώτη εξίσωση τη δεύτερη πολλαπλασιασμένη με (-1) $R_1 \to R_1 - R_2$

$$\begin{aligned} x+\tfrac{5}{3}z &= 6 \\ y-\tfrac{2}{3}z &= 0 \\ -y-4z &= -14 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right]$$

Προσθέτουμε στη τρίτη εξίσωση τη δεύτερη $R_3 \to R_3 + R_2$

$$\begin{aligned} x+\tfrac{5}{3}z &= 6 \\ y-\tfrac{2}{3}z &= 0 \\ -\tfrac{14}{3}z &= -14 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} & -14 \end{array}\right]$$

Πολλαπλασιάζουμε τη τρίτη εξίσωση επί $-\frac{3}{14}$ $\qquad R_3 \to -\frac{3}{14}R_3$

$$\begin{array}{rcl} x+\frac{5}{3}z & = & 6 \\ y-\frac{2}{3}z & = & 0 \\ z & = & 3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Προσθέτουμε στη πρώτη εξίσωση τη τρίτη πολλαπλασιασμένη με $(-\frac{5}{3})$ $\qquad R_1 \to R_1 - \frac{5}{3}R_3$

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y-\frac{2}{3}z & = & 0 \\ z & = & 3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Προσθέτουμε στη δεύτερη εξίσωση τη τρίτη πολλαπλασιασμένη με $(\frac{2}{3})$ $\qquad R_2 \to R_2 + \frac{2}{3}R_3$

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 2 \\ z & = & 3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$.

1.2 Απαλοιφή του Gauss (Gaussian elimination)

Κλιμακωτός πίνακας: Καλούμε **ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα** κάθε πίνακα ο οποίος ικανοποιεί τις ιδιότητες:

1. Έχει όλες τις **μηδενικές γραμμές** ομαδικά στο κάτω μέρος του πίνακα.

2. Κάθε μη μηδενική γραμμή έχει το πρώτο στοιχείο ίσο με το 1 (καλείται **ηγετικό στοιχείο 1**).

3. Για κάθε διαδοχικές μη μηδενικές γραμμές i και $(\mathrm{i}+1)$, το ηγετικό 1 της γραμμής $(\mathrm{i}+1)$ βρίσκεται στα δεξιά του ηγετικού 1 της γραμμής i.

4. Κάθε στήλη που έχει ηγετικό στοιχείο 1, τα υπόλοιπα στοιχεία είναι ίσα με μηδέν.

Κάθε πίνακας ο οποίος ικανοποιεί τις ιδιότητες 1, 2 και 3 καλείται **κλιμακωτός πίνακας**.

Παράδειγμα: Οι πιο κάτω πίνακες είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι πιο κάτω πίνακες είναι κλιμακωτοί πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Απαλοιφή του Gauss: Η μέθοδος βασίζεται σε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών. Μετασχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό ή σε κλιμακωτό. **Απαλοιφή του Gauss** είναι η μέθοδος που μετασχηματίζει τον επαυξημένο πίνακα σε κλιμακωτό, ενώ η **απαλοιφή των Gauss-Jordan** είναι η μέθοδος που μετασχηματίζει τον επαυξημένο πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό.

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 14 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας (α) την απαλοιφή του Gauss και (β) απαλοιφή των Gauss-Jordan.

Λύση:

Σημείωση: Αν κατά τη διαδικασία των μετασχηματισμών εμφανιστούν μηδενικές γραμμές, τότε παραλείπονται χωρίς να επηρεάζεται η λύση του συστήματος. Αν όμως εμφανιστούν γραμμές με όλα τα στοιχεία ίσα με μηδέν εκτός από το τελευταίο, τότε το σύστημα είναι μη συμβιβαστό.

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{array}{lcr} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 & = & -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 & = & -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 & = & 1 \\ 3x_1 - 3x_4 & = & -3 \end{array}$$

Λύση:

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{array}{lcr} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 9 \\ x_1 - 2x_3 + 7x_4 & = & 11 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 & = & 8 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 & = & 10 \end{array}$$

Λύση:

Σημείωση: Αν ο (ανηγμένος) κλιμακωτός που προέκυψε από τον επαυξημένο πίνακα ενός συστήματος, έχει m μη μηδενικές γραμμές και (n+1) στήλες, τότε:

(i) αν n=m το σύστημα έχει μια λύση,

(ii) αν n>m το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

1.3 Ομογενές γραμμικό σύστημα

Κάθε γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ . & & . & & & & . & & . \\ . & & . & & & & . & & . \\ . & & . & & & & . & & . \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

καλείται **ομογενές γραμμικό σύστημα**. Τέτοια συστήματα είναι συμβιβαστά επειδή έχουν τουλάχιστον τη **μηδενική λύση** ($x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$). Για κάθε ομογενές γραμμικό σύστημα ισχύει ένα από τα πιο κάτω:

(i) το σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση,

(ii) το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Θεώρημα: Κάθε ομογενές γραμμικό σύστημα με περισσότερους αγνώστους έχει άπειρες λύσεις.

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{array}{lcl} x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 & = & 0 \end{array}$$

Λύση: