6.1 Έστω ότι $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ είναι διανύσματα τέτοια ώστε

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2,\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -3,\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 5,\ \|\mathbf{u}\| = 1,\ \|\mathbf{v}\| = 2,\ \|\mathbf{w}\| = 3.$$

Να υπολογιστούν:

(i) $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{v}+\mathbf{w} \rangle$	(ii) $\langle 2\mathbf{v}-\mathbf{w}, 3\mathbf{u}+2\mathbf{w} \rangle$
(iii) $\langle \mathbf{u}-\mathbf{v}-2\mathbf{w}, 4\mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle$	(iv) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$
(v) $\|2\mathbf{w}-\mathbf{v}\|$	(vi) $\|\mathbf{u}-2\mathbf{v}+4\mathbf{w}\|$

6.2 Έστω ότι ο διανυσματικός χώρος P_2 έχει εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

(i) Να βρεθεί το $\|\mathbf{p}\|$ για $\mathbf{p} = 1,\ \mathbf{p} = x$ και $\mathbf{p} = x^2$.

(ii) Να βρεθεί η απόσταση $\mathrm{d}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ για $\mathbf{p} = 1,\ \mathbf{q} = x$.

6.3 Έστω

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

Να εξεταστεί αν τα πιο κάτω είναι εσωτερικά γινόμενα του M_{22}:

(i) $\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$

(ii) $\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = u_1v_1 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_4v_4$

6.4 Χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x$$

να βρεθεί το $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ για τα διανύσματα $\mathbf{p} = p(x)$ και $\mathbf{q} = q(x)$ του διανυσματικού χώρου P_3.

(i) $\mathbf{p} = 1 - x + x^2 + 5x^3,\ \ \mathbf{q} = x - 3x^2$

(ii) $\mathbf{p} = x - 5x^3,\ \ \mathbf{q} = 2 + 8x^2$

6.5 Έστω

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

διανύσματα του M_{22}. Ο τύπος

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο του M_{22}.

(i) Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$

(α) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(β) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

(ii) Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Να εξεταστεί ποια από τα πιο κάτω διανύσματα είναι ορθογώνια με το $\mathbf{A}$.

(α) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (γ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (δ) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

(iii) Να επαληθευτεί ότι ισχύει η ανισότητα των Cauchy-Schwarz για τα διανύσματα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

6.6 Έστω ότι V είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ τέτοια ώστε $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$, τότε να δειχθεί ότι

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}.$$

6.7 Να εξεταστεί αν τα πιο κάτω σύνολα είναι ορθοκανονικά ως προς το εσωτερικό γινόμενο που έχει οριστεί στη άσκηση 6.5.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

6.8 Να επαληθευθεί ότι τα διανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right), \quad \mathbf{v}_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$$

σχηματίζουν μια ορθοκανονική βάση ως προς το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο. Στη συνέχεια να εκφραστούν τα πιο κάτω διανύσματα ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$.

(i) $(1, -1, 2)$ (ii) $(3, -7, 4)$ (iii) $\left(\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{5}{7}\right)$

6.9 Έστω ότι S είναι μια ορθοκανονική βάση ενός 4-διάστατου χώρου με εσωτερικό γινόμενο. Χρησιμοποιώντας τα πιο κάτω να βρεθούν: $\|\mathbf{u}\|,\ \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|,\ \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ και $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

(i) $(\mathbf{u})_S = (-1, 2, 1, 3), \quad (\mathbf{v})_S = (0, -3, 1, 5), \quad (\mathbf{w})_S = (-2, -4, 3, 1)$

(ii) $(\mathbf{u})_S = (0, 0, -1, -1), \quad (\mathbf{v})_S = (5, 5, -2, -2), \quad (\mathbf{w})_S = (3, 0, -3, 0)$

6.10 Χρησιμοποιώντας την διαδικασία των Gram-Schidt να μετασχηματιστούν οι πιο κάτω βάσεις σε ορθοκανονικές.

(i) $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (3, 7, -2), \quad \mathbf{u}_3 = (0, 4, 1)$

(ii) $\mathbf{u}_1 = (0, 2, 1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (1, -1, 0, 0), \quad \mathbf{u}_3 = (1, 2, 0, -1), \quad \mathbf{u}_4 = (1, 0, 0, 1)$