5.1 Έστω ότι V είναι ένας διανυσματικός χώρος. Αν $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, να δειχθεί ότι ισχύει ο νόμος της απαλειφής:

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

5.2 Να δειχθεί ότι το σύνολο W το οποίο αποτελείται από διανύσματα της μορφής $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$, όπου $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

5.3 Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 3, -1)$ και $\mathbf{w} = (5, 3, -2)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

5.4 Να γραφεί το διάνυσμα $\mathbf{u} = (1, -2, 5)$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 2, 3)$ και $\mathbf{e}_3 = (2, -1, 1)$.

5.5 Να γραφεί το διάνυσμα $\mathbf{u} = (2, -5, 3)$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\mathbf{e}_1 = (1, -3, 2)$, $\mathbf{e}_2 = (2, -4, -1)$ και $\mathbf{e}_3 = (1, -5, 7)$.

5.6 Να βρεθεί η τιμή του k για την οποία το διάνυσμα $\mathbf{u} = (1, -2, k)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\mathbf{v} = (3, 0, -2)$ και $\mathbf{w} = (2, -1, -5)$.

5.7 Έστω τα διανύσματα

$$u_1 = x - 1, \quad u_2 = x^2 + 2x, \quad u_3 = x^2 + 2$$

του διανυσματικού χώρου P_2 (σύνολο των πραγματικών πολυωνύμων μέχρι και δεύτερου βαθμού). Να εξεταστεί αν τα πολυώνυμα (α) $\mathbf{v} = x^2 - 3x + 5$ και (β) $\mathbf{w} = x^2 - 2x - 2$ μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των u_1, u_2 και u_3.

5.8 Να δειχθεί ότι τα διανύσματα

$$u_1 = x - 1, \quad u_2 = x^2 + 2x, \quad u_3 = x^2 + 2$$

του διανυσματικού χώρου P_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα.

5.9 Να εξεταστεί αν τα πιο κάτω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
(i) $\mathbf{u} = (3, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -3)$
(ii) $\mathbf{u} = (4, 3, -2)$, $\mathbf{v} = (2, -6, 7)$
(iii) $\mathbf{u} = (2, -3)$, $\mathbf{v} = (6, -9)$

(iv) $\mathbf{u} = (-4, 6, -2),\ \mathbf{v} = (2, -3, 1)$

5.10 Να εξεταστεί αν τα πιο κάτω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
(i) $\mathbf{u}_1 = (1, -2, 1),\ \mathbf{u}_2 = (2, 1, -1),\ \mathbf{u}_3(7, -4, 1)$
(ii) $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -3),\ \mathbf{u}_2 = (1, -3, 2),\ \mathbf{u}_3(2, -1, 5),\ \mathbf{u}_4(1, 1, 1)$
(iii) $\mathbf{u}_1 = (2, -3, 7),\ \mathbf{u}_2 = (0, 0, 0),\ \mathbf{u}_3 = (3, -1, 4)$

5.11 Έστω ότι W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$u_1 = (2, -1, 2, 1),\ u_2 = (1, -2, 0, 3),\ u_3 = (3, 1, 0, -2)$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο $A = \{u_1, u_2, u_3\}$ είναι μια βάση του W. Να δοθεί η διάσταση του W.

5.12 Να εξεταστεί αν τα πιο κάτω σύνολα διανυσμάτων αποτελούν βάσεις του $\mathbb{R}^3$:
(i) $(1, 1, 1),\ (1, -1, 5)$
(ii) $(1, 1, 1),\ (1, 2, 3),\ (2, -1, 1)$
(iii) $(1, 2, 3),\ (1, 0, -1),\ (3, -1, 0),\ (2, 1, -2)$
(iv) $(1, 1, 2),\ (1, 2, 5),\ (5, 3, 4)$

5.13 Να βρεθεί η τιμή του k έτσι ώστε
(i) τα διανύσματα $(1, 1)$ και $(-1, k)$ να αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^2$
(ii) τα διανύσματα $(1, 0, 0),\ (1, 1, 1)$ και $(0, -1, k)$ να αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$

5.14 Έστω ότι W είναι ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από τις συναρτήσεις $f = \sin x$ και $g = \cos x$.
(i) Να δειχθεί ότι $f_1 = \sin(x + \theta)$ και $g_1 = \cos(x + \theta)$ είναι διανύσματα του W για όλες τις τιμές του θ.
(ii) Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις f_1 και g_1 αποτελούν μια βάση του W.

5.15 Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω πίνακες είναι γραμμικοί συνδυασμοί των

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix},\ \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{(i)}\ \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix},\ \ \text{(ii)}\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \ \text{(iii)}\ \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix},\ \ \text{(iv)}\ \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

5.16 Να βρεθούν οι συντεταγμένες του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ως προς τη βάση

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.17 Να βρεθούν οι συντεταγμένες του πολυωνύμου

$$p = x^2 - 3x + 4$$

ως προς τη βάση

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2.$$

5.18 Να βρεθούν οι συντεταγμένες του πολυωνύμου

$$p = x^2 - x + 2$$

ως προς τη βάση

$$p_1 = 1 + x, \quad p_2 = 1 + x^2, \quad p_3 = x + x^2.$$