

3.1 Να υπολογιστούν οι παρακάτω ορίζουσες

$$(i) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad (ii) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 14 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}$$

$$(iii) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad (iv) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

3.2 Να λυθεί η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

3.3 Να δειχθεί ότι η τιμή της πιο κάτω ορίζουσας είναι ανεξάρτητη του θ .

$$\begin{vmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta - \cos \theta & \sin \theta + \cos \theta & 1 \end{vmatrix}$$

3.4 Να βρεθούν οι τιμές των οριζουσών που αντιστοιχούν στους πιο κάτω πίνακες, αφού πρώτα μετατραπούν σε κλιμακωτούς πίνακες.

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad (iv) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(v) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (vi) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.5 Να δειχθεί ότι

$$(i) \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & xz \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$$

$$(ii) \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

3.6 Δίνεται ότι

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$$

Να υπολογιστούν τα εξής:

$$(i) \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} \quad (ii) \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$$

$$(iii) \begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad (iv) \begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$$

3.7 Έστω ότι $\det(\mathbf{A}) = -7$, όπου \mathbf{A} είναι ένας 3×3 πίνακας. Να βρεθούν:

$$(i) \det(3\mathbf{A}) \quad (ii) \det(2\mathbf{A} - \mathbf{I}) \quad (iii) \det((2\mathbf{A})^{-1}) \quad (iv) \det(\mathbf{A}^2)$$

3.8 Χωρίς να αναπτυχθούν οι ορίζουσες, να δειχθεί ότι

$$(i) \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$$

$$(ii) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 - bc \\ 1 & b & b^2 - ca \\ 1 & c & c^2 - ab \end{vmatrix} = 0$$

$$(iii) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = (a+b+1)(a-1)(b-1)$$

$$(iv) \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$3.9 \text{ Έστω ο πίνακας } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Για κάθε στοιχείο του πίνακα \mathbf{A} να βρεθούν

- (i) η ελάχιστων ορίζουσα
- (ii) το αλγεβρικό συμπλήρωμα

Στη συνέχεια να υπολογιστεί η τιμή της $\det(\mathbf{A})$ αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της

- (i) πρώτης γραμμής
- (ii) πρώτης στήλης
- (iii) δεύτερης γραμμής
- (iv) δεύτερης στήλης
- (v) τρίτης γραμμής
- (vi) τρίτης στήλης

3.10 Να υπολογιστούν οι ορίζουσες με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης.

$$(i) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad (ii) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \quad (iii) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(iv) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 9 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (v) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

3.11 Χρησιμοποιώντας τον τύπο $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{adj}(\mathbf{A})$, να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι αντίστροφοι των παρακάτω πινάκων

$$(i) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (iii) \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$(iv) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (v) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (vi) \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 5 & -6 & 11 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

3.11 Αν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ να επιβεβαιωθούν οι παρακάτω ιδιότητες

(i) $\mathbf{A} \operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \operatorname{adj}(\mathbf{A}) \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \mathbf{I}$

(ii) $\det(\operatorname{adj}(\mathbf{A})) = [\det(\mathbf{A})]^2$

3.12 Να υπολογιστούν οι ορίζουσες

$$(i) \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad (ii) \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(iii) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad (iv) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3.13 Με τη χρήση του κανόνα του Cramer, να λυθούν τα συστήματα

$$(i) \begin{array}{rcl} 2x + 3y - z & = & 1 \\ 3x + 5y + 2z & = & 8 \\ x - 2y - 3z & = & -1 \end{array} \quad (ii) \begin{array}{rcl} 2x - 5y + 2z & = & 7 \\ x + 2y - 4z & = & 3 \\ 3x - 4y - 6z & = & 5 \end{array} \quad (iii) \begin{array}{rcl} 2z + 10 & = & y + 3x \\ x - 3z & = & 2y + 8 \\ 4y + z & = & 3 - 2x \end{array}$$

$$(iv) \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 & = & -4 \\ x_1 + x_2 + x_4 & = & 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 & = & 16 \end{array} \quad (v) \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = & 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & -1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & -5 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 2 \end{array}$$

3.14 Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 & = & 0 \end{array}$$

3.15 Να λυθεί η άσκηση 1.8 χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer.

3.16 Ναδειχθεί ότι τα σημεία (x_1, y_1) , (x_2, y_2) και (x_3, y_3) είναι συνευθειακά αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$