

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1 Ναδειχθεί ότι το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= a \\x + z &= b \\2x + y + 3z &= c\end{aligned}$$

είναι συμβιβαστό αν ισχύει $c = a + b$.

1.2 Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς a για τις οποίες το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 4 \\3x - y + 5z &= 2 \\4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2\end{aligned}$$

- (i) δεν έχει λύση,
- (ii) έχει μόνο μια λύση,
- (iii) έχει άπειρες λύσεις.

1.3 Να μετατραπούν οι πιο κάτω πίνακες σε ανηγμένους κλιμακωτούς

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & -8 \\ 2 & -3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & -8 \\ 4 & -1 & 2 & -3 & -6 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & -13 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & -17 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad (iv) \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

1.4 Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της απαλοιφής του Gauss για να λυθούν τα γραμμικά συστήματα

$$(i) \begin{aligned}2x_1 - 3x_2 &= -2 \\2x_1 + x_2 &= 1 \\3x_1 + 2x_2 &= 1\end{aligned} \quad (ii) \begin{aligned}4x_1 + 2x_2 &= 12 \\3x_1 - 6x_2 &= 9 \\-2x_1 + 4x_2 &= -6\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
& 3x_1 + 2x_2 - x_3 & = -15 \\
\text{(iii)} & 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = 0 \\
& 3x_1 + x_2 + 3x_3 & = 11 \\
& -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 & = 30
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
& 10x_2 - 4x_3 + x_4 & = 12 \\
& x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 & = 2 \\
\text{(iv)} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = 5 \\
& -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 2x_4 & = -4 \\
& x_1 - 6x_2 + 3x_3 & = 1
\end{array}$$

1.5 Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της απαλοιφής των Gauss-Jordan για να λυθούν τα γραμμικά συστήματα της άσκησης (1.4).

1.6 Να λυθούν τα γραμμικά συστήματα

$$\begin{array}{rcl}
& 3x_1 + x_3 & = 11 \\
\text{(i)} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 5 \\
& x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = -3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
& 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = 1 \\
\text{(ii)} & 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 & = 8 \\
& 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 & = -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
& x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 & = 3 \\
\text{(iii)} & 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 & = -4 \\
& x_1 + x_2 + x_4 & = 3 \\
& 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 & = 16
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
& x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = 4 \\
\text{(iv)} & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = -1 \\
& x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = -5 \\
& x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 2
\end{array}$$

1.7 Να λυθούν τα πιο κάτω ομογενή γραμμικά συστήματα

$$\begin{array}{rcl}
& 2x_1 - x_2 - 3x_3 & = 0 \\
\text{(i)} & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = 0 \\
& x_1 + x_2 + 4x_3 & = 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
& x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = 0 \\
\text{(ii)} & 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 & = 0 \\
& 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 & = 0 \\
& -4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 & = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
& x_1 + 3x_2 + x_4 & = 0 \\
\text{(iii)} & x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = 0 \\
& x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = 0 \\
& x - x_2 + x_3 - x_4 & = 0
\end{array}$$

1.8 Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς k για τις οποίες τα πιο κάτω συστήματα έχουν μη-μηδενικές λύσεις.

$$\begin{array}{rcl}
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0 \\
& x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = 0 \\
\text{(i)} & (k-3)x_1 + x_2 & = 0 \\
& x_1 + (k-3)x_2 & = 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
& -2x_2 - 2x_3 - x_4 & = 0 \\
\text{(ii)} & 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\
& x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 & = 0
\end{array}$$