ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{o}

5.1 $\dfrac{xy^3}{1+y^2}=\dfrac{8}{5}\Rightarrow 5xy^3=8+8y^2$ (1)

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς t :

$$\Rightarrow 5\frac{dx}{dt}y^3+15xy^2\frac{dy}{dt}=16y\frac{dy}{dt}\Rightarrow\frac{dy}{dt}=\frac{5\frac{dx}{dt}y^3}{16y-15xy^2}$$

Όμως όταν $x=1,\ y=2,\ \dfrac{dx}{dt}=6$ έχουμε:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{5(6)(2)^3}{16(2)-15(1)(2)^2}=-\frac{60}{7}$$

Άρα το y μειώνεται με ρυθμό $\dfrac{60}{7}$ μονάδες/sec

5.2 $y=\sqrt{x^3+17}\Rightarrow y^2=x^3+17$ (1)

Παραγωγίζοντας την (1) ως προς t :

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dt}=3x^2\frac{dx}{dt}\Rightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{2y\frac{dy}{dt}}{3x^2}$$

$x=2\Rightarrow y=\sqrt{8+17}=\sqrt{25}=5$

$\dfrac{dy}{dt}=2$ Άρα $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2(5)(2)}{3(2)^2}=\dfrac{5}{3}$

Άρα το x αυξάνεται με ρυθμό $\dfrac{5}{3}$ μονάδες/sec

5.3 Ορίζω: $f(x)=\tan x-x,\ x\in\left(0,\pi/2\right)\Rightarrow f'(x)=\sec^2 x-1$ (1)

Για κάθε $x\in\left(0,\pi/2\right)$ έχουμε:

$0<\cos x<1\Rightarrow 0<\cos^2 x<1\Rightarrow\dfrac{1}{\cos^2 x}>1$ (2)

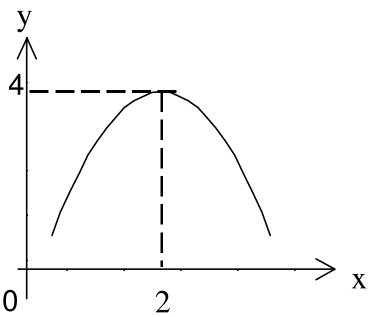
$(1),(2)\Rightarrow f'(x)>1\ \forall x\in\left(0,\pi/2\right)\Rightarrow f(x)$ αύξουσα στο $\left(0,\pi/2\right)$

Συνεπώς $f(x)>f(0)\ \forall x\in\left(0,\pi/2\right)\Rightarrow f(x)=\tan x-x\ \forall x\in\left(0,\pi/2\right)$

$\tan x>x,\ \forall x\in\left(0,\pi/2\right)$

5.4 (i) $f(2)=4, f''(2)=0, f''(x)<0, \forall x \in R$

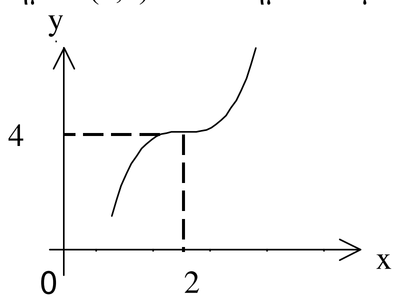
Το σημείο $(2,4)$ είναι τοπικό μέγιστο



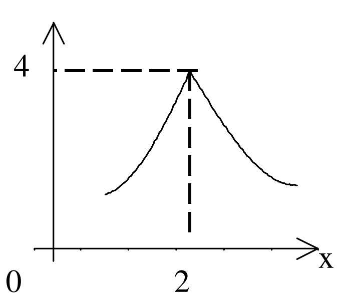
(ii) $f(2)=4, f'(2)=0, f''(x)<0$ όταν $x<2$

και $f''(x)>0$ όταν $x>2$

Το σημείο $(2,4)$ είναι σημείο καμπής



(iii) $f(2)=4, f''>0$ όταν $x \neq 2$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = -\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = +\infty$



5.5 $\left(-\frac{1}{2},4\right)$ τοπικό ακρότατο της $f(x)=x^2+\frac{1}{x}+\alpha x+b$

$f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}+\alpha$

$$\left.\begin{aligned} & f\left(-\tfrac{1}{2}\right)=4 \Rightarrow b-\frac{1}{2}\alpha=\frac{23}{4} \\ & f'\left(-\tfrac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow \alpha=5 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & b=\frac{33}{4} \\ & \alpha=5 \end{aligned}$$

5.5 (i) $f(x)=x^4-8x^2+17 \Rightarrow f'(x)=4x^3-16x=4x(x-2)(x+2)$

x		-2		0		2	
f	-	0	+	0	-	0	+

Άρα η f(x) θα είναι φθίνουσα στο $(-\infty,-2]\cup[0,2]$ και αύξουσα στο $[-2,0]\cup[2,+\infty)$

(ii) $f(x)=x^3+2x^2-x-2 \Rightarrow f'(x)=3x^2+4x-1$

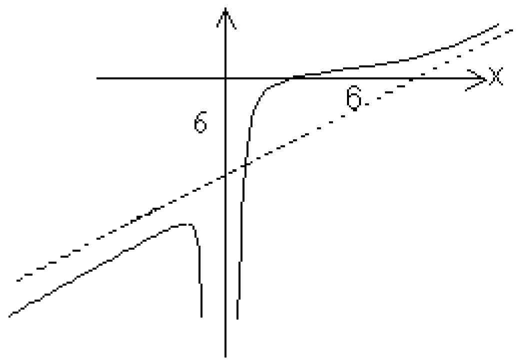
$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+12}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{28}}{2}=-2\pm\sqrt{7}$$

x		$-2-\sqrt{7}$		$-2+\sqrt{7}$	
f	+	0	-	0	+

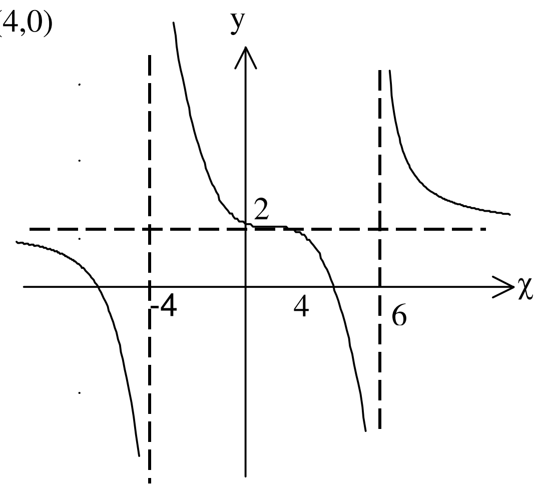
Άρα η f(x) είναι αύξουσα στο $\left(-\infty,-2-\sqrt{7}\right]\cup\left[-2+\sqrt{7},+\infty\right]$ και φθίνουσα στο $\left[-2-\sqrt{7},-2+\sqrt{7}\right]$

5.6 (iii) $f(x)=\sin x\text{-}x \Rightarrow f'(x)=\cos x\text{-}1 \leq 0$
Άρα η f(x) θα είναι φθίνουσα $\forall x \in R$

5.7 (i) $y=\dfrac{(x\text{-}2)^3}{x^2}=\dfrac{x^3\text{-}6x^2+12x\text{-}18}{x^2}$
Πεδίο Ορισμού: R-{0}
Σημεία τομής με άξονες:(2,0)
Ασύμπτωτες: x=0, y=x-6



(ii) $f(x)=\dfrac{2(x+6)(x\text{-}4)}{(x\text{-}6)(x+4)}$
Πεδίο Ορισμού: R-{- 4,6}
Σημεία τομής με άξονες:(0,2), (-6,0), (4,0)
Ασύμπτωτες: y=2, x= -4, x=6

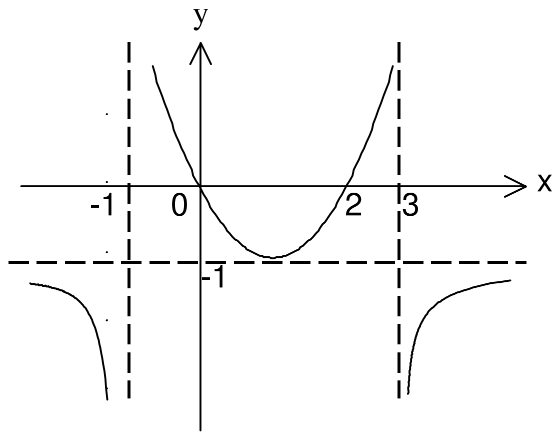


5.7 (iii) $f(x)=\frac{2x-x^2}{x^2-2x-3}=\frac{x(2-x)}{(x-3)(x+1)}$

Πεδίο Ορισμού: R-{-1,3}

Σημεία τομής με άξονες:(0,0), (2,0)

Ασύμπτωτες: x= -1, x=3, y= -1



5.8 (i) $f(x)=1-x^{2/3} \Rightarrow f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-1/3}$

Πεδίο Ορισμού: $x \in R$

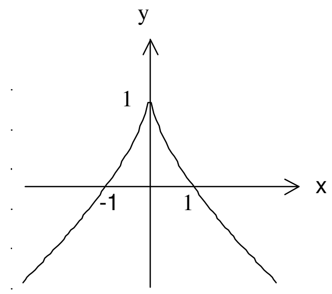
Σημεία τομής με άξονες:(0,1), (-1,0), (1,0)

Το x=0 είναι σημείο ανάκαμψης αφού:

$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=+\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=-\infty$

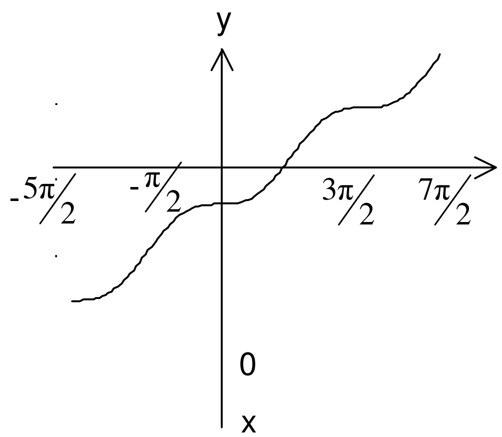
Επίσης: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$



(ii) $f(x)=x-\cos x \Rightarrow f'(x)=1+\sin x \Rightarrow f'(x)\geq 0, \forall x\in R \Rightarrow f(x)$ αύξουσα (1)

$f'(x)=0 \Rightarrow x_n=-\frac{\pi}{2}+2n\pi, n\in Z$

Άρα στα σημεία x_n θα έχουμε σημεία καμπής (διότι από την (1) δεν μπορεί να έχουμε ακρότατα)



5.9 $2y^2=5(x+1) \Rightarrow 5(x+1) \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

Αν (x,y) είναι σημείο της καμπύλης $2y^2=5(x+1)$ τότε η απόσταση του από το $(0,0)$

θα είναι: $d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\frac{5(x+1)}{2}},\ x\in[-1,+\infty)$

$$d'=\frac{2x+5/2}{2\sqrt{x^2+5x/2+5/2}}>0 \text{ στο } [-1,+\infty)$$

Άρα η d είναι αύξουσα στο $[-1,+\infty) \Rightarrow$ η ελάχιστη απόσταση θα είναι στο $x=-1$

$$d=\sqrt{(-1)^2+5(-1+1)/2}=\sqrt{1+0}=1$$

5.10 (i) $f(x)=2\sec x-\tan x \Rightarrow f'(x)=2\sec x\tan x-\sec^2 x=\frac{2\sin x-1}{\cos^2 x}$

Στο $\left[0,\pi/4\right]$: $f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$

Έτσι έχουμε: $f(0)=2,\ f\left(\pi/6\right)=\sqrt{3},\ f\left(\pi/4\right)=2\sqrt{2}-1$

$$\Rightarrow \max_{[0,\pi/4]} f(x)=\max\left\{2,\sqrt{3},2\sqrt{2}-1\right\}=2$$

$$\min_{[0,\pi/4]} f(x)=\min\left\{2,\sqrt{3},2\sqrt{2}-1\right\}=\sqrt{3}$$

Άρα η f(x) έχει μέγιστο 2 και ελάχιστο $\sqrt{3}$ στο διάστημα $\left[0,\pi/4\right]$

(ii)
$$f(x)=\begin{cases}6-4x, & x\leq 3/2\\ 4x-6, & x>3/2\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-4, & x<3/2\\ 4, & x>3/2\end{cases}$$

Η $f'(x)$ δεν ορίζεται στο $x=3/2 \Rightarrow$ Θα έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο το $\left(3/2,0\right)$.

Έτσι έχουμε : $f(-3)=18,\ f\left(3/2\right)=0,\ f(3)=6$

Άρα η μέγιστη τιμή είναι 18 και η ελάχιστη 0.

(ii) $f(x)=\sin(\cos x) \Rightarrow f'(x)=-\sin x\cos(\cos x)$

$f'(x)=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=\pi$ στο $(0,2\pi)$

Έτσι έχουμε: $f(0)=\sin 1,\ f(\pi)=\sin(-1)=\sin 1,\ f(2\pi)=\sin 1$

Άρα θα έχει μέγιστη τιμή $\sin 1$ και ελάχιστη $-\sin 1$

(iv) $f(x)=1+\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0,\ \forall x\in(0,+\infty)$

$\Rightarrow$ f(x) φθίνουσα στο $(0,+\infty) \Rightarrow$ Δεν έχει max και min

5.11 $f(x)=\begin{cases} 4x-2, & x<1 \\ x^2-5x+6, & x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 4, & x<1 \\ 2x-5, & x\geq 1 \end{cases}$

Στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$ η $f'(x)$ μηδενίζεται στο $x=5/2$ και δεν ορίζεται στο x=1(και είναι συνεχής στο x=1).

Έτσι έχουμε: $f\left(1/2\right)=0$, $f(1)=2$, $f\left(5/2\right)=-1/4$, $f\left(7/2\right)=3/4$

Άρα το μέγιστο είναι το 2 και το ελάχιστο είναι το $-1/4$

5.12 (i) Ορίζω $f(x)=x^2-6 \Rightarrow f'(x)=2x$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^2-6}{2x_k}$$

Παίρνοντας μια αρχική τιμή $x_0=2.5$ (που είναι κοντά στο $\sqrt{6}$) έχουμε:

$$x_1=2.5-\frac{(2.5)^2-6}{2\times(2.5)}=2.45$$

$$x_2=2.45-\frac{(2.45)^2-6}{2\times(2.45)}=\underbrace{2.4}494897$$

$$x_3=x_2-\frac{x_2{}^2-6}{2x_2}=\underbrace{2.4494897}43$$

$$x_4=x_3-\frac{x_3{}^2-6}{2x_3}=\underbrace{2.449489743}$$

(ii) Ορίζω $f(x)=x^3-6 \Rightarrow f'(x)=3x^2$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-6}{3x_k^2}$$

Παίρνουμε αρχική τιμή $x_0=2$ και βρίσκουμε:

$$x_1=2-\frac{2^3-6}{3\times 2^2}=1.83333$$

$$x_2=\underbrace{1.8}17263545$$

$$x_3=\underbrace{1.817}120604$$

$$x_4=\underbrace{1.817120}593$$

$$x_5=\underbrace{1.817120593}$$

5.13 $f(x)=x^3+x^2-4x+1$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ είναι συνεχής στο } [-1,2] \\ f(x) \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (-1,2) \\ f(-1)=f(2)=5 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ Από θεώρημα Rolle $\exists c\in(-1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(c)=0$

$$\Rightarrow f'(x)=3x^2+2x-4\Rightarrow 3c^2+2c-4=0\Rightarrow c_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\in(-1,2)$$

5.14 $f(x)=6x^5-4x+1$

Ορίζω : $g(x)=x^6-2x^2+x\Rightarrow g'(x)=f(x)$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} g(x) \text{ συνεχής στο } [0,1] \\ g(x) \text{ παραγωγίσιμη στο } (0,1) \\ g(0)=g(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in(0,1) \text{ τέτοιο ώστε } g'(c)=0 \ (2) \ (\text{Θ. Rolle})$$

Από (1), (2) $\Rightarrow \exists c\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(c)=0$

5.15 (i) Έστω $f(x)=\tan x$ και έστω $y>x$ με $x,y\in\left(-\pi/2,\pi/2\right)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ είναι συνεχής στο } [x,y] \\ f(x) \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (x,y) \end{array}\right\}$$

Από θεώρημα Μέσης Τιμής $\Rightarrow \exists c\in(x,y)$ τέτοιο ώστε $f'(c)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$

$$\Rightarrow \frac{\tan x-\tan y}{x-y}=\sec^2(c)\Rightarrow\frac{|\tan x-\tan y|}{|x-y|}=\sec^2(c)$$

Επειδή $\sec^2(\theta)\geq 1\ \forall\theta\Rightarrow\dfrac{|\tan x-\tan y|}{|x-y|}\geq 1\Rightarrow|\tan x-\tan y|\geq|x-y|\ \forall x,y\in\left(-\pi/2,\pi/2\right)$

Θέτοντας $y=-y\Rightarrow|\tan x+\tan y|\geq|x+y|$

(ii) Υποθέτω ότι η $f(x)$ ικανοποιεί: $f(1)=0,\ f'(x)=\dfrac{1}{x}$

Θέλω να δείξω ότι $f(x)\leq x-1\ \forall x\in(0,+\infty)$

Για $x=1$ προφανώς ισχύει.

Έστω $x\in(0,1)$ τότε:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ είναι συνεχής στο } [x,1] \\ f(x) \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (x,1) \end{array}\right\} \Rightarrow\exists c\in(x,1) \text{ τέτοιο ώστε } f'(c)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{-f(x)}{1-x}=\frac{1}{c},\ c\in(x,1)$$

$$c<1\Rightarrow\frac{1}{c}>1\Rightarrow\frac{-f(x)}{1-x}>1\Rightarrow f(x)<x-1$$

Παρόμοια για $x\in(1,+\infty)$ εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[1,x]$

$$\Rightarrow\exists c\in(1,x): f'(c)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{c}<1$$

Άρα $f(x)-0<x-1\Rightarrow f(x)<x-1$

5.15 (iii) Η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[x,y]$, $0<x<y$

$$\Rightarrow \frac{\ln y-\ln x}{y-x}=f'(c)=\frac{1}{c} \text{ όπου } c\in(x,y)$$

Δηλαδή: $x<c<y \Rightarrow \frac{1}{y}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$

Άρα: $\frac{1}{y}<\frac{\ln y-\ln x}{y-x}<\frac{1}{x} \Rightarrow 1-\frac{x}{y}<\ln y-\ln x<\frac{y}{x}-1$

5.16 Ορίζω : $h(x)=f^2(x)+g^2(x)$

$$h'(x)=2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)\left[-f(x)\right]=0\ \forall x$$

$\Rightarrow h(x)$ σταθερή $\Rightarrow f^2(x)+g^2(x)$ σταθερή

5.17 $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$

$$\left.\begin{array}{l}(x-1)^2\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\\ x^2+x+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x) \text{ είναι πάντα θετική}$$

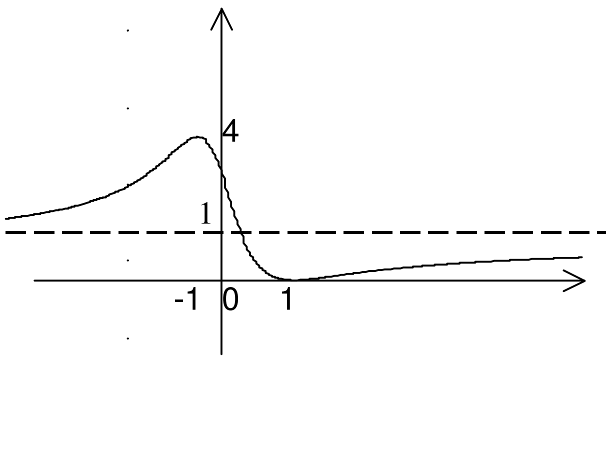
Έχουμε μόνο οριζόντια ασύμπτωτη: $y=1$

$$f'(x)=\frac{2(x-1)\left(x^2+x+1\right)-(2x+1)(x-1)^2}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\ldots=\frac{3(x-1)(x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

x		-1		1	
y	+	0	-	0	+
	↗	max (-1,4)	↘	min (1,0)	↗

$f(-1)=\dfrac{(-2)^2}{(-1)^2-1+1}=4$, $f(1)=0$

Σημεία τομής με άξονες:(1,0), (0,1)



5.18 $y=\dfrac{\alpha x+b}{x^2-x-2} \Rightarrow y'=\dfrac{\alpha\left(x^2-x-2\right)-\left(\alpha x+b\right)(2x-1)}{\left(x^2-x-2\right)^2} \Rightarrow y'=\dfrac{\alpha x^2-2bx+b-2\alpha}{\left(x^2-x-2\right)^2}$

Όμως: $y\big|_{x=1}=1$ και $y'\big|_{x=1}=0$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{\alpha+b}{2}=1 \Rightarrow \alpha+b=-2 \\ \dfrac{-\alpha-2b+b-2\alpha}{4}=0 \Rightarrow 3\alpha+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=1,\ b=-3$$

Άρα τελικά $y=\dfrac{x-3}{(x-2)(x+1)}$

Σημεία τομής με άξονες: $(3,0)$, $\left(0,\tfrac{3}{2}\right)$

Ασύμπτωτες: $x=2$, $x=-1$, $y=0$

$$y'=\frac{-(x-1)(x-5)}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

x		1		5	
y′	-	0	+	0	-

min max

$(1,1)$ $\left(5,\tfrac{1}{4}\right)$