<u>ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ</u>
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</u>

4.1 (i) $f(x)=\frac{1}{x+1}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)-1}-\frac{1}{x+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+1-x-h-1}{h(x+1)(x+h+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+1)(x+h+1)}=\frac{-1}{(x+1)^2}$$

(ii) $f(x)=\sqrt{x+1}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h+1-x-1}{h\left(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

(iii) $f(x)=x^{1/3}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{1/3}-x^{1/3}}{h}\frac{\left[(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right]}{\left[(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right]}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left[(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left[(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right]}=\frac{1}{3x^{2/3}}$$

(iv) $f(x)=\cos x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cosh-\cos x}{h}-\sin x\,\cancelto{1}{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}}=\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x$$

$$=\cos x\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2\left(h/2\right)}{h}-\sin x=-2\cos x\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(h/2\right)}{h}\right)\cancelto{0}{\lim_{h\to 0}\sin\left(h/2\right)}-\sin x=-\sin x$$

(v) $f(x)=\tan x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(x+h-x)}{\cos x\cos(x+h)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos x\cos(x+h)}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

(vi) $f(x)=\sec x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x-\cos(x+h)}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{x+x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h\cos(x+h)\cos x}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{\cos(x+h)\cos x}\lim_{h\to 0}\cancel{\frac{\sin\left(h/2\right)}{h}}^{1/2}$$

$$=2\frac{\sin x}{\cos^2 x}\frac{1}{2}=\tan x\sec x$$

4.2 $y=\alpha x^2+bx$

Το (1,5) είναι σημείο της καμπύλης $\Rightarrow 5=\alpha+b$ (1)

$8=\lambda_{\varepsilon\varphi}=y'\big|_{x=1}=2\alpha x+b\big|_{x=1}=2\alpha+b\Rightarrow 2\alpha+b=8$ (2)

Λύνοντας το σύστημα των (1),(2) βρίσκουμε $\alpha=3, b=2$

4.4
$$f_1(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ \sqrt{x+2}, & -2\le x<0\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}x+2, & x<-2\\ x+2-\sqrt{x+2}, & -2\le x<0\end{cases}$$

Ελέγχουμε αν η $f_1(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x=-2$ από δεξιά:

$$f_1'(-2)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f_1(-2+h)-f_1(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{-2+h}-\sqrt{-2+2}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$$

Άρα η $f_1(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=-2$

Ελέγχουμε αν η $f_2(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x=-2$ από αριστερά:

$$f_2'(-2)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f_2(-2+h)-f_2(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-2+h+2-\sqrt{-2+h+2}-\left[-2+2-\sqrt{-2+2}\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{h-\sqrt{h}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\left(1-\frac{1}{\sqrt{h}}\right)=-\infty$$

Άρα η $f_2(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=-2$

$(f_1+f_2)(x)=x+2$ που προφανώς είναι παραγωγίσιμη $\forall x\in R$

$(f_1+f_2)'(x)=1, \forall x\in R\Rightarrow (f_1+f_2)'(-2)=1$

4.5 (α) $y=\dfrac{\sin x}{x} \Leftrightarrow yx=\sin x \ (1)$

$\Leftrightarrow y'x+y=\cos x \Leftrightarrow y''x+y'+y'= -\sin x \ (2)$

$\text{Από}(1)\ \text{και}(2)\ \Rightarrow y''x+2y'= -yx \Rightarrow y''+\dfrac{2}{x}+y=0$

(β) $x^2+y^2=2y \Leftrightarrow 2x+2yy'=2y' \Leftrightarrow y'=\dfrac{2x}{2-2y}=\dfrac{x}{1-y} \ (1)$

$2x+2yy'=2y' \Leftrightarrow 2+2y'y'+2yy''=2y'' \Leftrightarrow 1+\left(y'\right)^2+yy''=y'' \ (2)$

$\text{Από}(1)\ \text{και}(2)\text{:}\ 1+\left(\dfrac{x}{1-y}\right)^2+y''\left(y-1\right)=0 \Rightarrow \left(1-y\right)^2+x^2+y''\left(y-1\right)^3=0$

$\Rightarrow 1+\underbrace{y^2-2y+x^2}_{=0}+y''\left(1-y\right)^3=0 \Rightarrow y''\left(1-y\right)^3= -1$

(γ)

$y=\sqrt{\sec 2x} \Rightarrow y^2=\sec 2x \Leftrightarrow \cancel{2}yy'=\cancel{2}\sec 2x\tan 2x \Leftrightarrow y'=\dfrac{\sec 2x \tan 2x}{\sqrt{\sec 2x}} \Leftrightarrow y'=y\tan 2x \ (1)$

$\Leftrightarrow y''=y'\tan 2x+2y\sec^2 2x \ (2)$

$\text{Από}(1)\ \text{και}(2) \Rightarrow y''=y\tan^2 2x+2y\sec^2 2x \Rightarrow y''=y\left(-1+y^4\right)+2y^5 \Rightarrow y''=3y^5-y$

(δ) $y=\sqrt{5x^2+3} \Rightarrow y^2=5x^2+3 \Rightarrow 2yy'=10x \Rightarrow yy'=5x \Rightarrow y'y'+yy''=5$

4.6 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left[f(x+3h)\right]^2-\left[f(x+h)\right]^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[f(x+3\cancel{h}^{0})+f(x+\cancel{h}^{0})\right]\dfrac{\left[f(x+3h)-f(x+h)\right]}{h}$

$=2f(x)\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left[f\left((x+h)+2h\right)-f(x+h)\right]}{h}=2f(x)\ 2\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{2h}$

$=4f(x)\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x+k)-f(x)}{k}=4f(x)f'(x)$

4.7

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\le 1 \\ k(x-1), & x>1 \end{cases}$$

(α) Η f είναι συνεχής στο $\left(-\infty,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$. Εξετάζουμε αν είναι συνεχής στο x=1

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-1\right)=0,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} k(x-1)=0$ και $f(1)=0$

Άρα η f είναι συνεχής και στο x=1 για όλες τις τιμές του k

4.7 (β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x=1 :

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1-(1^2-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h}{h}=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k(1+h-1)-(1^2-1)}{h}=k$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη <u>και</u> στο x=1 αν k=2.

4.8 (α) Η f(x) είναι άρτια δηλαδή $f(-x)=f(x)$. Άρα και $f(-x+h)=f(x-h)$

$$f'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\quad \text{Θέτουμε } x=x+h$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-f'(x)$$

Άρα η f' είναι περιττή συνάρτηση.

(β) Η f(x) είναι περιττή, δηλαδή $f(-x)=-f(x)$. Άρα και $f(-x+h)=-f(x-h)$

$$f'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-f(x-h)+f(x)}{h}, \text{ Θέτουμε } x=x+h$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

Άρα η f' είναι άρτια συνάρτηση.

4.9 Έστω $x\in[0,2]$ με $x\neq 1$. Κατά το θεώρημα της μέσης τιμής, $\exists c\in(1,x)$ τέτοιο ώστε: $f(x)-f(1)=(x-1)f'(c)\Rightarrow |f(x)-3|=|x-1||f'(c)|$

Επειδή $c\in(1,x)$ έχουμε $|x-1|\leq 1$

Επίσης ισχύει $|f'(c)|\leq 2$ στο $(0,2)$

Άρα $|f(x)-3|\leq 1\times 2=2\Rightarrow 1\leq f(x)\leq 5$

4.10 Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x).g(x)$

Η h(x) είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ γιατί οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο $[0,1]$

Επιπλέον έχουμε ότι: $h(0)=f(0).g(0)=0$ και $h(1)=f(1).g(1)=0$ γιατί $f(0)=g(1)=0$

Άρα κατά το θεώρημα του Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $c\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h'(c)=0$. Τώρα $h'(x)=0\Rightarrow f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=0$

Επειδή $f(x)g(x)\neq 0$ στο $(0,1)$ (δίνεται) διαιρούμε με $f(x)g(x)$ και βρίσκουμε:

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}+\dfrac{g'(x)}{g(x)}=0$. Η εξίσωση αυτή έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$ και αυτή είναι το c που βρήκαμε πιο πάνω

4.11 f(x+y)=f(x)f(y) *και* f(x)=1+xg(x) όπου $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{hg(h)}{h}$$
$$=f(x)\lim_{h\to 0}g(h)=f(x)$$

4.12 $x(t)=2t^3-15t^2+24t+7$, $y(t)=t^2+t+1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$

(α) Για να έχει η καμπύλη οριζόντια εφαπτομένη πρέπει η παράγωγος της να είναι ίση με μηδέν. Επομένως για να έχουμε $\frac{dy}{dx}=0$ πρέπει $\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow 2t+1=0 \Rightarrow t=-1/2$

(β) Για να έχει η καμπύλη κατακόρυφη εφαπτομένη σημαίνει ότι η παράγωγος της απειρίζεται. Επομένως πρέπει $\frac{dx}{dt}=0 \Rightarrow 6t^2-30t+24=0 \Rightarrow t^2-5t+4=0 \Rightarrow (t-4)(t-1)=0$

$\Rightarrow$ t=1 και t=4

4.13 $x(t)=t^2-3t+5$, $y(t)=t^3+t^2-10t+9$

Για να τέμνει η καμπύλη τον εαυτό της στο σημείο (3,1) σημαίνει ότι παίρνουμε τις τιμές x=3,y=1 για δύο τιμές του t . Επομένως έχουμε :

$3=t^2-3t+5 \Rightarrow t^2-3t+2=0$ και $1=t^3+t^2-10t+9$

$t^2-3t+2=0 \Rightarrow (t-1)(t-2)=0 \Rightarrow t=1$ και $t=2$

<u>Επαλήθευση :</u> $\begin{matrix} t=1: 1^3+1^2-10(1)+9=1 \\ t=2: 2^3+2^2-10(2)+9=1 \end{matrix}$

Επομένως το σύστημα ικανοποιείται για t=1 και t=2

$\Rightarrow$ Το σημείο (3,1) ανήκει στην καμπύλη με αυτές τις παραμετρικές εξισώσεις και μάλιστα τέμνει τον εαυτό της στο σημείο αυτό.

<u>t=1 :</u> $\lambda_{E\Phi}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\left.\frac{3t^2+2t-10}{2t-3}\right|_{t=1}=5$

Επομένως εξίσωση εφαπτομένης: $y-1=5(x-3) \Rightarrow y=5x-14$

<u>t=2 :</u> $\lambda_{E\Phi}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}=\left.\frac{3t^2+2t-10}{2t-3}\right|_{t=2}=6$

Επομένως εξίσωση εφαπτομένης: $y-1=6(x-3) \Rightarrow y=6x-17$

4.14 $y=\dfrac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y\sqrt{1-x^2}=\sin^{-1}x \Rightarrow \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}y+y'\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow -xy+(1-x^2)y'=1$

Παραγωγίζοντας ξανά : $\Rightarrow -y-xy'+(-2x)y'+(1-x^2)y''=0 \Rightarrow (1-x^2)y''-3xy'-y=0$

4.15 (i) $f(x)=\tan^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

$$f'(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'\frac{1}{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}=\frac{-1-x-1+x}{\cancel{(1+x)^2}}\frac{\cancel{(1+x)^2}}{(1+x)^2+(1-x)^2}$$

$$=-2\frac{1}{x^2+2x+1+x^2-2x+1}=\frac{-1}{x^2+1}$$

(ii) $f(x)=\tan^{-1}\left(xe^{2x}\right)$

$$f'(x)=\left(xe^{2x}\right)'\frac{1}{1+\left(xe^{2x}\right)^2}=\frac{e^{2x}+2xe^{2x}}{1+x^2e^{4x}}$$

(iii) $f(x)=\sin^{-1}\left(x^2\ \ln x\right)$

$$f'(x)=\left(x^2\ \ln x\right)'\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2\ \ln x\right)^2}}=\left(2x\ln x+x^2\frac{1}{x}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^4\ \ln^2 x}}=\frac{2x\ln x+x}{\sqrt{1-x^4\ln^2 x}}$$

(iv) $f(x)=\dfrac{\tan^{-1}x}{\ln x}$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{1+x^2}\ln x-\dfrac{1}{x}\tan^{-1}x}{\ln^2 x}=\frac{x\ln x-\left(1+x^2\right)\tan^{-1}x}{x\left(1+x^2\right)\ln^2 x}$$