ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{o}

3.1 (i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}}=4+4+4=12$

(ii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{5x^2-2}}{x+3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{5x^2-2}{(x+3)^2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{5x^2-2}{x^2+6x+9}}=\sqrt{5}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-x}{2-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(4-x)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 4}(2+\sqrt{x})=4$

(iv)

$$f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}\quad\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x}=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$

(v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{4}$

(vi) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(1-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}{(x-3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-x+2}{(x-3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}\left(1+\sqrt{x-2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-1}{1+\sqrt{x-2}}=-\dfrac{1}{2}$

(vii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}{\sqrt{x^2+3}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$

(viii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+5x}-x=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+5x}+x\right)}{\sqrt{x^2+5x}+x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+5x-x^2}{\sqrt{x^2+5x}+x}$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+5x}+x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x/x}{\sqrt{x^2/x^2+5/x^2}+x/x}=\dfrac{5}{2}$

3.2 (i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(kx)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}k^2\left[\dfrac{\sin kx}{kx}\right]^2=k^2\times 1=k^2$, διότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin(kx)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{3-k\left[\dfrac{\sin(kx)}{kx}\right]\right\}=3-k$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,\dfrac{\sin x}{x}=0\times 1=0$

3.2 (iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to0}\frac{\text{sint}}{t}=1$, Θέτω $t=\frac{1}{x}$ και αν $x\to+\infty$ τότε $t\to0$

(v) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\pi\text{-x}}{\text{sinx}}$, Θέτουμε $t=\pi\text{-}x \Rightarrow t\to0$ όταν $x\to\pi$

Άρα: $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\pi\text{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\sin(\pi\text{-t})}=\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\text{sint}}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{\sin t/t}=\frac{1}{1}=1$.(*Σημ.* $\sin(\pi\text{-t})=\text{sint}$)

(vi) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\tan x\text{-}1}{x\text{-}\pi/4}$, Θέτουμε $t=x\text{-}\pi/4 \Rightarrow t\to0$ αν $x\to\pi/4$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\tan\left(t+\pi/4\right)\text{-}1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\text{tant}+\tan\pi/4}{1\text{-tant}\times\tan\pi/4}\text{-}1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{2\tan t}{t(1\text{-tant})}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2\sin t}{(\cos t)t(1\text{-}\tan t)}=\lim_{t\to0}\frac{\text{sint}}{t}\frac{2}{\text{cost}}\frac{1}{(1\text{-tant})}=1\times2\times1=2$$

Διότι $\lim\limits_{t\to0}\frac{\text{sint}}{t}=1,\ \lim\limits_{t\to0}\frac{2}{\text{cost}}=2,\ \lim\limits_{t\to0}\frac{1}{1-\tan t}=1$

3.3 (i) $\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(3\text{-}x)=2\\&\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(3+x)=4\end{aligned}\right\}\Rightarrow$ f(x) ασυνεχής στο x=1

Άρα η f(x) θα είναι συνεχής στο $R\text{-}\{1\}$

(ii) $f(x)=\frac{|x^2\text{-}4|}{x+2}=\frac{|(x\text{-}2)(x+2)|}{x+2}$

$$f(x)=\begin{cases}x\text{-}2, & x<\text{-}2\\ 2\text{-}x, & \text{-}2\le x\le2\\ x\text{-}2, & x>2\end{cases}$$

Η f(x) είναι συνεχής στα διαστήματα $(\text{-}\infty,\text{-}2), (\text{-}2,2), (2,+\infty)$.

Στο x= -2 η f(x) είναι ασυνεχής διότι δεν ορίζεται.

Επίσης: $\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}(2\text{-}x)=0\\&\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}(x\text{-}2)=0\\&f(2)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow$ f συνεχής στο x=2

Άρα η f(x) θα είναι συνεχής στο $R\text{-}\{\text{-}2\}$.

3.3 (iii)
$$f(x)=\begin{cases} 2x+1, & -1\le x<4 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x\ge 4 \end{cases}$$

Η f(x) είναι συνεχής στα διαστήματα $(-1,4),\ (4,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(2x+1)=-1=f(-1)\Rightarrow$ Συνεχής στο x= -1

Επίσης: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(2x+1)=9 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{5}{3} \end{array}\right\}\Rightarrow$ Η f(x) είναι ασυνεχής στο x=4

Άρα η f(x) θα είναι συνεχής στο $[-1,4)\cup(4,+\infty)$

(iv)
$$f(x)=\begin{cases} 1+x, & x<-1 \\ 2x, & -1\le x\le 1 \\ 3x-1, & x>1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-2\neq \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=0$ (1)

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ (2)

Άρα από τις (1),(2) $\Rightarrow$ Η f(x) θα είναι συνεχής στο $R-\{-1\}$

3.4
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x}, & x\neq 0 \\ k, & x=0 \end{cases}$$

f(x) συνεχής στο x=0 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=k$

$\Rightarrow 3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=k\Rightarrow k=3$

3.5
$$f(x)=\begin{cases} -2\sin x, & x\le -\pi/2 \\ \alpha\sin x+b, & -\pi/2<x<\pi/2 \\ \cos x, & x\ge \pi/2 \end{cases}$$

f(x) συνεχής στο $x=-\pi/2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -\pi/2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -\pi/2^+} f(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to -\pi/2^-}(-2\sin x)=\lim\limits_{x\to -\pi/2^-}(\alpha\sin x+b)$

$\Rightarrow -2\underbrace{\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)}_{-1}=\alpha\underbrace{\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)}_{-1}+b\Rightarrow 2=-\alpha+b$ (1)

Παρόμοια f(x) συνεχής στο $x=\pi/2\ \Rightarrow \lim\limits_{x\to \pi/2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi/2^+} f(x)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to \pi/2^-}(\alpha\sin x+b)=\lim\limits_{x\to \pi/2^-}\cos x\Rightarrow \alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+b=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \alpha+b=0$ (2)

Από τις εξισώσεις (1),(2) βρίσκουμε $\alpha = -1$, $b = 2$

3.6 (i) $f(x) = x - \cos x, \left[0, \pi/2\right]$

Παρατηρούμε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\left[0, \pi/2\right]$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f\left(\pi/2\right) = \pi/2 > 0 \end{array}\right\} \quad f(0)f\left(\pi/2\right) = -\pi/2 < 0$$

$\Rightarrow$ Η εξίσωση $x - \cos x = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $\left[0, \pi/2\right]$

(ii) $f(x) = x + \sin x - 1, \left[0, \pi/6\right]$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\left[0, \pi/6\right]$

Παρατηρούμε ότι: $\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(\pi/6) = \pi/6 - 1/2 > 0 \end{array}\right\} \quad f(0)f(\pi/6) = 1/2 - \pi/6 < 0$

Άρα η εξίσωση $x + \sin x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $\left[0, \pi/6\right]$

3.7 (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \dfrac{1}{1}$

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2 + e^{x}}{1 + 3e^{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^{-x} + 1}{e^{-x} + 3} = \dfrac{1}{3}$

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-e^{x}} = e^{-\infty} = 0$

(iv) Παρατηρούμε ότι: $\dfrac{d}{dx}\left[e^{2x} - e^{x}\right]_{x=0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{x} - 1 + 1}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{x}}{x}$

$\dfrac{d}{dx}\left[e^{2x} - e^{x}\right] = 2e^{2x} - e^{x}$

Άρα : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{x}}{x} = 2e^{2x} - e^{x}\Big|_{x=0} = 2 - 1 = 1$

(v) Όμοια με πιο πάνω παρατηρούμε ότι:

$\dfrac{d}{dx}\left[e^{x}\right]_{x=\alpha} = \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{e^{x} - e^{\alpha}}{x - \alpha} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{e^{x} - e^{\alpha}}{x - \alpha} = e^{x}\Big|_{x=\alpha} = e^{\alpha}$

(vi) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right)$, Θέτω $t = \dfrac{1}{x}$, $x \to \infty \Rightarrow t \to 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\left(e^{t} - 1\right) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{t} - 1}{t} = \dfrac{d}{dt}\left[e^{t}\right]_{t=0} = e^{0} = 1$

3.8 $f(x)=\begin{cases} 2\text{-}x,\ x\le 1 \\ \alpha x+b+\ln x,\ 1<x<2 \\ \ln x,\ x\ge 2 \end{cases}$

Θέλουμε η f(x) να είναι συνεχής στο x=1 δηλ. : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}(2\text{-}x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\alpha x+b+\ln x) \Rightarrow 2\text{-}1=\alpha+b+\cancelto{0}{\ln 1} \Rightarrow \alpha+b=1\ (1)$

Επίσης θέλουμε η f(x) να είναι συνεχής στο x=2 δηλ. : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-}(\alpha x+b+\ln x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\ln x \Rightarrow 2\alpha+b+\cancel{\ln 2}=\cancel{\ln 2} \Rightarrow \alpha+b=0\ (2)$

Από τις εξισώσεις (1), (2) προκύπτει α=-1, b=2

3.9 $f(x)=\begin{cases} \cos x+\lambda\sin x,\ 0\le x\le \pi/4 \\ (2\lambda+1)\tan x,\ \pi/4<x<\pi/2 \end{cases}$

Για να είναι συνεχής η f(x) στο διάστημα $\left[0,\pi/2\right)$ πρέπει:

$\lim\limits_{x\to \pi/4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi/4^+} f(x)=f\left(\pi/4\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(\pi/4\right)+\lambda\cos\left(\pi/4\right)=(2\lambda+1)\tan\left(\pi/4\right) \Leftrightarrow (1+\lambda)\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\lambda+1$

$\Leftrightarrow \lambda\left(2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1 \Leftrightarrow \lambda\left(\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}-2}{2} \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{\sqrt{2}\text{-}2}{4\text{-}\sqrt{2}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}\text{-}2\right)\left(4+\sqrt{2}\right)}{\left(4\text{-}\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)}$

$\Rightarrow \lambda=\dfrac{2\sqrt{2}\text{-}6}{12} \Rightarrow \lambda=\dfrac{\sqrt{2}\text{-}3}{6}$

3.10 Ορίζουμε h(x)=f(x)-g(x). Επειδή f, g είναι συνεχείς στο διάστημα [0,1]
$\Rightarrow$ και η h(x) θα είναι συνεχής στο [0,1]

Τώρα h(0)=f(0)-g(0)=f(0)-f(1), επειδή g(0)=f(1)
h(1)=f(1)-g(1)=f(1)-f(0), επειδή g(1)=f(0)

$\Rightarrow h(0)\bullet h(1)=\left[f(0)\text{-}f(1)\right]\left[f(1)\text{-}f(0)\right]=-\left[f(1)\text{-}f(0)\right]^2\le 0$

Τώρα επειδή $g(0)\ne g(1)\Rightarrow f(0)\ne f(1)$ (επειδή f(0)=g(1), f(1)=g(0))

$\Rightarrow h(0)\bullet h(1)<0$

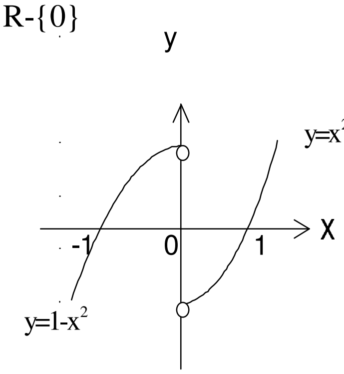
Άρα η h(x) θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[0,1]\Rightarrow \exists c\in(0,1)$ τέτοιο ώστε h(c)=0
$\Rightarrow$ f(c)=g(c)

3.11

$$f(x)=\frac{|x|}{x}(x^2-1)=\begin{cases} 1-x^2, & x<0 \\ x^2-1, & x>0 \end{cases}$$

Η f(x) είναι ασυνεχής στο x=0 επειδή δεν ορίζεται καν

Άρα η f(x) είναι συνεχής στο R-{0}



3.12

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x \text{ ρητός } (x\in Q) \\ 0, & x \text{ άρρητος } (x\notin Q) \end{cases} \Rightarrow xf(x)=\begin{cases} x, & x\in Q \\ 0, & x\notin Q \end{cases}$$

Αν x>0 $\Rightarrow 0 \le xf(x) \le x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} xf(x)=0$

$$\underset{0}{\downarrow} \qquad \underset{0}{\downarrow}$$

Αν x<0 $\Rightarrow x \le xf(x) \le 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} xf(x)=0$

$$\underset{0}{\downarrow} \qquad \underset{0}{\downarrow}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} xf(x)=0$