ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{o}

2.1 (i) $f(x)=x^2-3x+2$

Η f(x) ορίζεται $\forall x \in R \Rightarrow$ Έχει Π.Ο ολόκληρο το R

Για το Π.Τ της f(x) έχουμε :

<u>1^{ος} τρόπος</u>

$$y=x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \quad (1)$$

Το Π.Τ. της f(x) θα είναι οι τιμές που παίρνει το y $\forall x \in R$. Από την σχέση (1) φαίνεται ότι : $y \geq -\frac{1}{4}$.Άρα η f(x) θα έχει Π.Τ. το διάστημα $\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$

<u>2^{ος} τρόπος</u>

Έστω $x^2-3x+2=\alpha$. Θα βρούμε τις τιμές των α έτσι ώστε η εξίσωση $x^2-3x+2=\alpha$ να έχει πραγματική ρίζα.

Όμως $x^2-3x+2=\alpha \Leftrightarrow x^2-3x+(2-\alpha)=0$ (2)

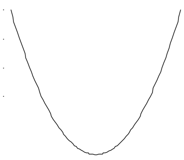
Η (2) έχει πραγματικές ρίζες όταν :

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 9-4(2-\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow 9-8+4\alpha \geq 0 \Leftrightarrow 4\alpha \geq -1 \Leftrightarrow \alpha \geq -\frac{1}{4}$$

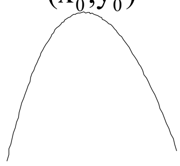
Έτσι έχουμε ότι το Π.Τ. της f(x) θα είναι το διάστημα $\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$

<u>Σημείωση:</u>

$y=\alpha(x-x_0)^2+y_0$

1) $\alpha>0$: Μορφή:  Π.Τ. : $y \geq y_0$

(x_0,y_0)

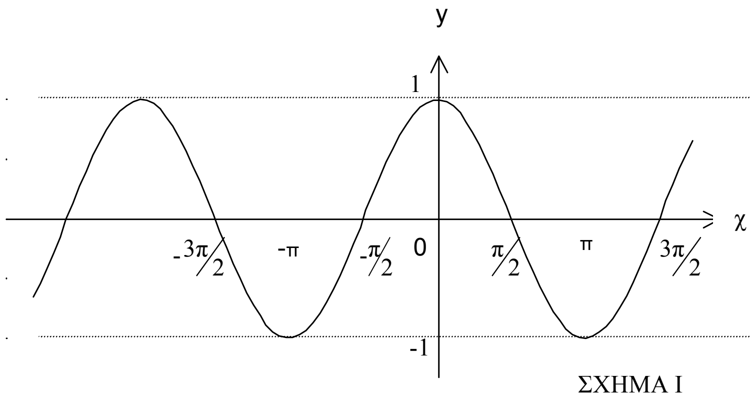
2) $\alpha<0$: Μορφή : (x_0,y_0)  Π.Τ. : $y \leq y_0$

(ii) $f(x)= x+\cos x$

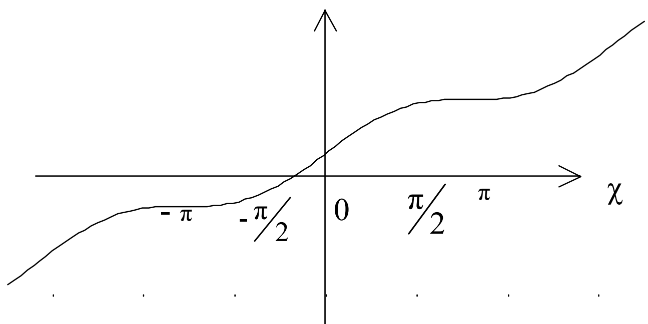
Η $f(x)$ έχει Π.Ο. το R .

Τώρα για το Π.Τ. της $f(x)$ κάνουμε τα γραφήματα των συναρτήσεων :

$g(x)=x$ και $h(x)=\cos x$. Δηλαδή :



ΣΧΗΜΑ Ι



ΣΧΗΜΑ ΙΙ

Τώρα από το σχήμα ΙΙ παρατηρούμε ότι η $f(x)$ παίρνει όλες τις τιμές του R

$\Rightarrow$ η $f(x)$ θα έχει Π.Τ το R .

(iii) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$

Η $f(x)$ ορίζεται σε όλο το R εκτός από το $x=0$. Άρα θα έχει Π.Ο το R-$\{0\}$

Τώρα για να βρούμε το Π.Τ της $f(x)$ θέτουμε $x^2+\frac{1}{x}=\alpha$ και θα βρούμε τις τιμές του α για τις οποίες ικανοποιείται η εξίσωση :

$x^2+\frac{1}{x}=\alpha,\ x\neq 0 \Leftrightarrow x^3+1=\alpha x,\ x\neq 0 \Leftrightarrow x^3-\alpha x+1=0,\ x\neq 0$ (1)

Τώρα επειδή το πολυώνυμο $p(x)= x^3- \alpha x+1$ είναι περιττού βαθμού (3ου)$\Rightarrow$έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα $\forall \alpha\in R$. Αυτό συμβαίνει διότι ξέρουμε ότι οι μιγαδικές ρίζες εμφανίζονται ανά ζεύγη, άρα το πολύ να έχει δύο μιγαδικές ρίζες οπότε απομένει μια πραγματική +

<u>Σημείωση :</u> Ένα πολυώνυμο βαθμού n έχει n ρίζες (πραγματικές ή μιγαδικές)

$\Rightarrow$Η εξίσωση (1) έχει πραγματική ρίζα $\forall \alpha\in R$ $\Rightarrow$η $f(x)$ θα έχει Π.Τ. το R

(iv) $f(x)= x+ {}^{1}\!/_{x}$

Η f(x) ορίζεται σε όλο το R εκτός από το x=0. Άρα θα έχει Π.Ο το $R\text{-}\{0\}$

Έστω $x+ {}^{1}\!/_{x}=\alpha,\ x \neq 0 \Leftrightarrow x^2+1=\alpha x,\ x \neq 0 \Leftrightarrow x^2\text{-}\alpha x+1=0,\ x \neq 0$ (2)

Η εξίσωση (2) έχει πραγματικές ρίζες όταν $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha\text{-}2)(\alpha+2) \geq 0$

α		-2		2	
(α-2)(α+2)	+	0	-	0	+

Άρα η f(x) θα έχει Π.Τ : $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

(v) $f(x)= x^2+\sqrt{1\text{-}x^2}$

Η f(x) είναι ορισμένη για όλες τις τιμές του x για τις οποίες:

$1\text{-}x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1\text{-}x)(1+x) \geq 0$

x		-1		1	
(x-1)(x+1)	-	0	+	0	-

Άρα η f(x) θα έχει Π.Ο. το [-1,1]

Το Π.Τ της f(x) θα είναι το : $\left[1, {}^{5}\!/_{4}\right]$

(vii) $f(x)=\dfrac{1}{x^2\text{-}1}$

Η f(x) ορίζεται όταν $x^2\text{-}1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \text{-}1,1 \Rightarrow$ η f(x) θα έχει Π.Ο το $R\text{-}\{\text{-}1,1\}$

Τώρα για να βρούμε το Π.Τ της f(x) θέτουμε : $\dfrac{1}{x^2\text{-}1}=\alpha$

$$\frac{1}{x^2\text{-}1}=\alpha \Leftrightarrow 1=\alpha\left(x^2\text{-}1\right) \Leftrightarrow 1=\alpha x^2\text{-}\alpha \Leftrightarrow \alpha x^2=1+\alpha \Leftrightarrow x^2=\frac{1+\alpha}{\alpha}$$

Άρα πρέπει : $\dfrac{1+\alpha}{\alpha} \geq 0 \Leftrightarrow (1+\alpha)\alpha \geq 0,\ \alpha \neq 0$

α		-1		0	
(α+1)α	+	0	-	□	+

Αυτό μας δίνει $\alpha \leq \text{-}1,\ \alpha>0$. Έτσι έχουμε ότι το Π.Τ της f(x) είναι το: $(\text{-}\infty,\text{-}1]\cup(0,+\infty)$

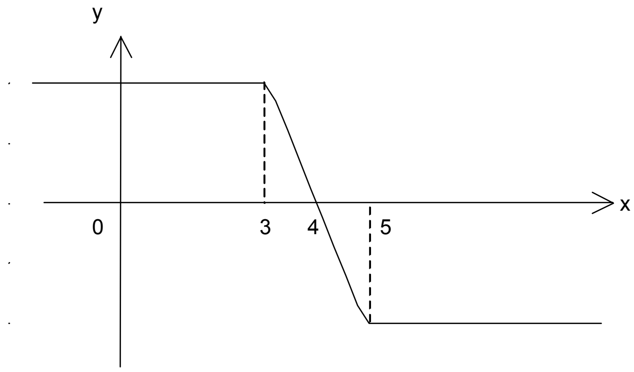
2.2 $f(x)=|x-5|-|x-3|$

Για $x<3$: $f(x)=-(x-5)+(x-3)=2$

Για $3 \le x<5$: $f(x)=-(x-5)-(x-3)=8-2x$

Για $x \ge 5$: $f(x)=(x-5)-(x-3)=-2$

Άρα η f ορίζεται ως : $f(x)=\begin{cases} 2 & , \ x<3 \\ 8-2x & , \ 3 \le x<5 \\ -2 & , \ x \ge 5 \end{cases}$



2.4 $f(x)=\dfrac{1}{|x-3|^2+|x-3|-6}$

(α) Η f(x) ορίζεται σ' όλο το R εκτός από αυτές όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής

Έχουμε $|x-3|^2+|x-3|-6=0 \Leftrightarrow \left(|x-3|+3\right)\left(|x-3|-2\right)=0$

$|x-3|+3=0 \Rightarrow |x-3|=-3$ Απορρίπτεται

$|x-3|-2=0 \Rightarrow |x-3|=2 \Rightarrow x-3=\pm 2 \Rightarrow x=5$ και $x=1$

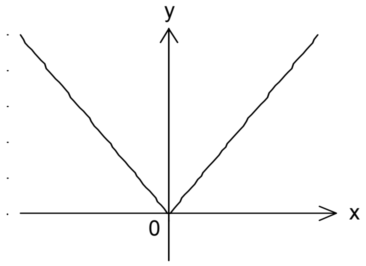
Άρα το Π.Ο της f(x) είναι το : R-{1,5}

(β) $f_1(x)=\dfrac{1}{x}$, $f_2(x)=|x|^2+|x|-6$, $f_3(x)=x-3$

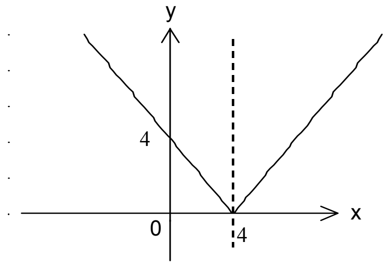
ή $f_1(x)=\dfrac{1}{x}$, $f_2(x)=x^2+x-6$, $f_3(x)=|x-3|$

ή $f_1(x)=\dfrac{1}{|x-3|^2+|x-3|-6}$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x$

2.3 $f(x)=|x|$

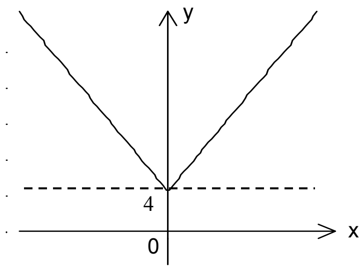


(i) $y=|x-4|$



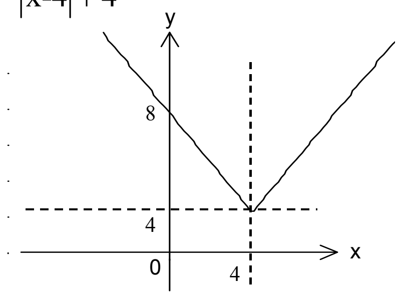
Μετατόπιση του γραφήματος κατα 4 μονάδες προς τα δεξιά

(ii) $y=|x|+4$



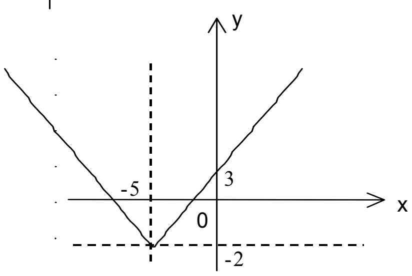
Μετατόπιση του γραφήματος της f(x) 4 μονάδες προς τα πάνω

(iii) $y=|x-4|+4$



Συνδυασμός των (i) και (ii)

(iv) $y=|x+5|-2$



Μετατόπιση του γραφήματος κατά 5 μονάδες προς τα αριστερά και 2 μονάδες προς τα κάτω.

2.5 $f_1(x)=5x+4,\ f_2(x)=6x+c$

$(f_1 \circ f_2)(x)=(f_2 \circ f_1)(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f_1(6x+c)=f_2(5x+4)$

$\Leftrightarrow 5(6x+c)+4=6(5x+4)+c \Leftrightarrow 30x+5c+4=30x+24+c \Leftrightarrow 4c=20 \Rightarrow c=5$

2.6 $f(x)=g(x)+h(x)$

$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$, $h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$

$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=g(x) \Rightarrow$ Η g είναι άρτια

$h(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]= -\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]= -h(x) \Rightarrow$ Η h είναι περιττή

(i) $f(x)=e^x=\frac{1}{2}[e^x+e^{-x}]+\frac{1}{2}[e^x-e^{-x}]$

(ii) $f(x)=e^x\sin x=\frac{1}{2}[e^x\sin x+e^{-x}\sin(-x)]+\frac{1}{2}[e^x\sin x-e^{-x}\sin(-x)]$

$=\frac{1}{2}[e^x\sin x-e^{-x}\sin x]+\frac{1}{2}[e^x\sin x+e^{-x}\sin x]$

(iii) $f(x)=10^x+2x=\frac{1}{2}[(10^x+2x)+(10^{-x}-2x)]+\frac{1}{2}[(10^x+2x)-(10^{-x}-2x)]$

(iv) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\sqrt{\frac{x-1}{x-1}}=\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} \Rightarrow f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Έστω $g(x)= -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ και $h(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$g(-x)= -\frac{1}{\sqrt{(-x)^2-1}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=g(x) \Rightarrow$ g άρτια

$h(-x)=\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2-1}}= -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}= -h(-x) \Rightarrow$ h περιττή

Δηλαδή η f(x) γράφεται ως άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης.

2.7 $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$, Π.Ο.: $[-1,1]$

$f_2(x)=\sin 3x$, Π.Ο.: R

(i) $(f_1+f_2)(x)=\sqrt{1-x^2}+\sin 3x$

(ii) $(f_1-f_2)(x)=\sqrt{1-x^2}-\sin 3x$

(iii) $(f_1.f_2)(x)=\sqrt{1-x^2}.\sin 3x$

Οι πιο πάνω συναρτήσεις έχουν Π.Ο την τομή των πεδίων ορισμών των f_1,f_2

Άρα θα έχουν και οι τρεις Π.Ο. : [-1,1]

(iv) $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sin 3x}$

Το Π.Ο της είναι η τομή των Π.Ο των f_1,f_2 εκτός τα σημεία όπου μηδενίζεται η f_2

Δηλ. πρέπει $-1 \le x \le 1$ και $\sin 3x \neq 0 \Rightarrow -1 \le x \le 1$ και $3x \neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,...$

Άρα Π.Ο. της $\frac{f_1}{f_2}$: $[-1,0)\cup(0,1]$

(v) $(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(\sin 3x) = \sqrt{1-\sin^2 3x}$

Το Π.Ο της $(f_1 \circ f_2)(x)$ είναι εκείνα τα x του Π.Ο της f_2 για τα οποία οι τιμές $f_2(x)$ ανήκουν στο Π.Ο της $f_1(x)$. Για την $f_1(x)$ έχουμε ότι $|x| \le 1 \Rightarrow$

Για την $f_1(f_2(x))$ θα πρέπει $|f_2(x)| \le 1 \Rightarrow |\sin 3x| \le 1$ το οποίο ισχύει $\forall x \in R$

Άρα η $(f_1 \circ f_2)(x)$ θα έχει Π.Ο : $x \in R$

(vi) $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(\sqrt{1-x^2}) = \sin\left[3\sqrt{1-x^2}\right]$

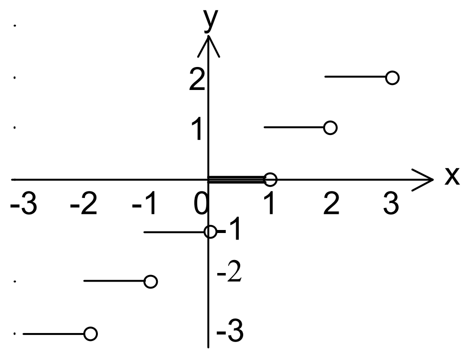
Όμοια με το (v) : Για την $f_2(x)$ έχουμε ότι $x \in R$.Άρα πρέπει $3\sqrt{1-x^2} \in R$

Αυτό ισχύει για $-1 \le x \le 1 \Rightarrow$ Π.Ο. της $f_2 \circ f_1 : [-1,1]$

2.8 Αν $x \in [k,k+1)$ τότε $f(x) = [k] = k$, όπου $k \in Z$

(i)

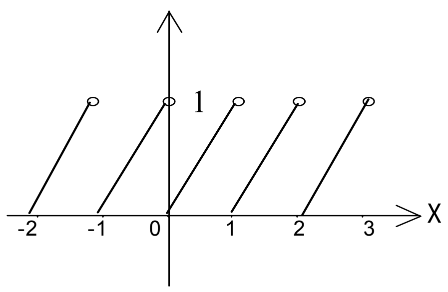
$$f(x) = \begin{cases} \vdots \\ -3, \text{ αν } x \in [-3,-2) \\ -2, \text{ αν } x \in [-2,-1) \\ -1, \text{ αν } x \in [-1,0) \\ 0, \text{ αν } x \in [0,1) \\ 1, \text{ αν } x \in [1,2) \\ 2, \text{ αν } x \in [2,3) \\ 3, \text{ αν } x \in [3,4) \\ \vdots \end{cases}$$



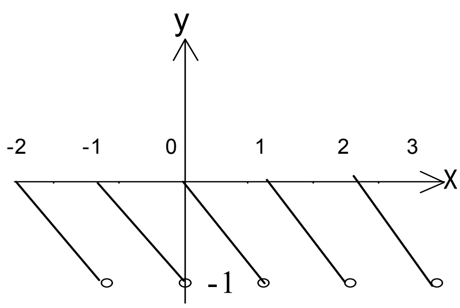
Η f δεν είναι περιοδική

Τώρα, $\forall x \in R$ έχουμε $x = [x] + \varepsilon$, όπου $\varepsilon \in [0,1)$

(ii) $f(x) = x - [x] = \varepsilon$



(iii) $f(x) = [x] - x = -\varepsilon$

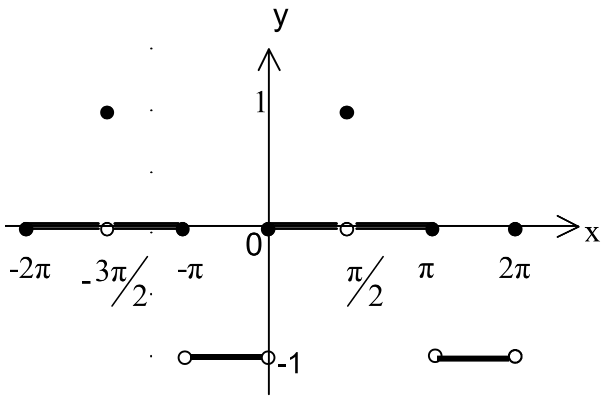


Από τις γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις η f είναι περιοδική με περίοδο T=1

(iv) $f(x)=[\sin x]$ Στο διάστημα $[0,2\pi]$ έχουμε

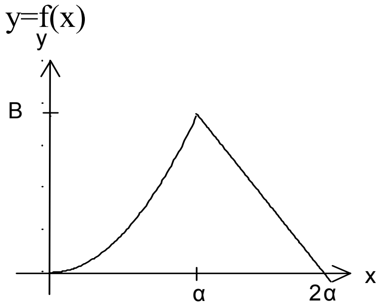
Ανάλογα αποτελέσματα έχουμε για οποιοδήποτε διάστημα μήκους 2π

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ αν } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right) \\ 1 \text{ αν } x=\frac{\pi}{2} \\ 0 \text{ αν } x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right] \\ -1 \text{ αν } x\in(\pi,2\pi) \\ 0 \text{ αν } x=2\pi \end{cases}$$

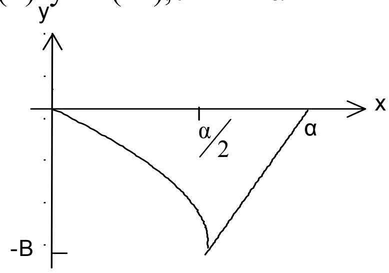


Η f είναι περιοδική με Τ=2π.

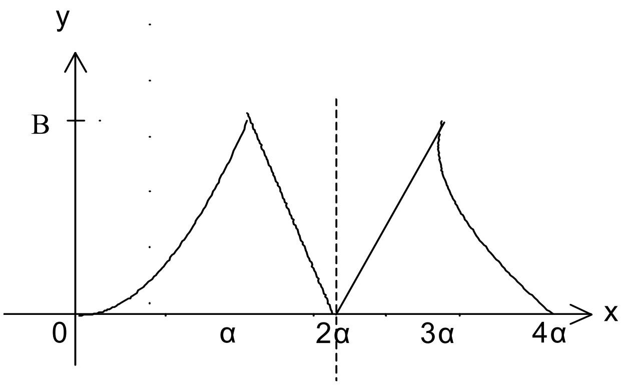
2.9 $y=f(x)$



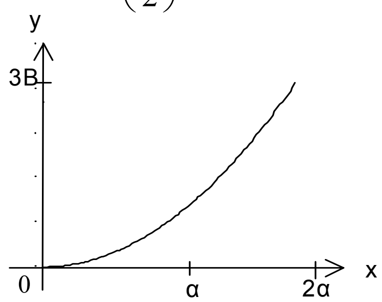
(ii) $y=-f(2x), 0\le x\le \alpha$



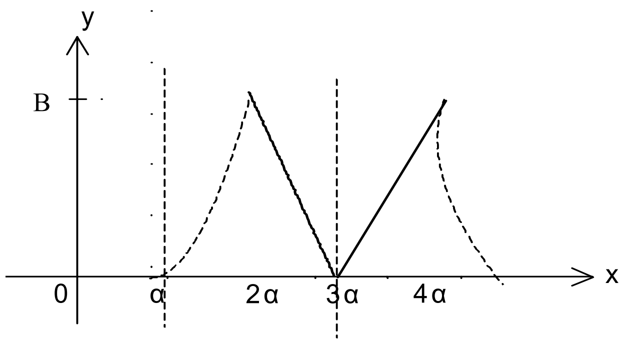
(i) $y=f(x), 0\le x\le 4\alpha$



(iii) $y=3f\left(\frac{x}{2}\right), 0\le x\le 2a$



(iv) $y=f(x-\alpha), 2\alpha\le x\le 4\alpha$



2.10 $f(x)=\dfrac{px+q}{x+r}$, $x \neq -r$, f(x) άρτια $\Rightarrow f(-x)=f(x), \forall x \in R$

(i) $f(-x)= f(x) \Rightarrow \dfrac{-px+r}{-x+r}=\dfrac{px+r}{x+r} \Rightarrow \cancel{-px^2} - rpx+qx+\cancel{qr} = \cancel{-px^2} -qx+prx+\cancel{qr}$

$\Rightarrow 2prx-2qx=0 \Rightarrow 2x(pr-q)=0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow pr =q$

(ii) $f(x)=\dfrac{px+r}{x+r}=\dfrac{px+pr}{x+r}=\dfrac{p\,\cancel{(x+r)}}{\cancel{x+r}}=p$, $x \neq -r$. Άρα η f είναι σταθερή διότι p σταθερά.

2.11 (α) $f(x+y)=f(x)-f(y), \forall x,y \in R$

$f(x)= f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)= f\left(\dfrac{x}{2}\right)- f\left(\dfrac{x}{2}\right)=0, \forall x \in R$. Λόγω της πιο πάνω ιδιότητας

(β) $f(-x)= -f(x), \forall x \in R \Rightarrow f(-0)= -f(0) \Rightarrow f(0)= -f(0) \Rightarrow 2f(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$

2.12 (i) $f(x)=(x+2)^4$, $x \geq 0$

Θέτω $y=(x+2)^4 \Rightarrow x+2=y^{1/4} \Rightarrow x=y^{1/4}-2 \Rightarrow f^{-1}(x)=x^{1/4}-2$

Τώρα για να βρούμε το Π.Ο. της f^{-1} αρκεί να βρούμε το Π.Τ της f

Έχουμε λοιπόν ότι $x \geq 0$. Άρα $y=(x+2)^{1/4} \geq 2^4=16$ (για $x \geq 0$ η f είναι αύξουσα άρα την μικρότερη της τιμή την παίρνει για x=0).

$\Rightarrow$ Η f(x) θα έχει Π.Τ. το $[16,+\infty)$

$\Rightarrow$ Η $f^{-1}(x)$ θα έχει Π.Ο. το $[16,+\infty)$

(ii) $f(x)=\sqrt{x+3}$, $x \geq -3$

Έστω $y =\sqrt{x+3} \Rightarrow y^2= x+3 \Rightarrow x = y^2-3 \Rightarrow f^{-1}(x)= x^2-3$

Το Π.Τ. της f είναι το $[0,+\infty) \Rightarrow$ Το Π.Ο της $f^{-1}(x)$ είναι το $[0,+\infty)$

(iii) $f(x)=3x^2+5x-2$, $x \geq 0$

Η f(x) είναι μια παραβολή. Θα προσπαθήσουμε να την φέρουμε στην μορφή $f(x)=\alpha(x-x_0)^2+y_0$

Έστω $y=3x^2+5x-2=3\left(x^2+\dfrac{5}{3}x-2\right)=3\left[\left(x+\dfrac{5}{6}\right)^2-\dfrac{25}{36}-2\right]=3\left(x+\dfrac{5}{6}\right)^2-\dfrac{49}{12}$ (1)

$\Rightarrow y+\dfrac{49}{12}=3\left(x+\dfrac{5}{6}\right)^2 \Rightarrow \left(\dfrac{12y+49}{36}\right)^{\frac{1}{2}}=x+\dfrac{5}{6} \Rightarrow x=\dfrac{-5+\sqrt{12y+49}}{6}$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{-5+\sqrt{12x+49}}{6}$

Από την εξίσωση (1) παρατηρώ ότι $y \geq -\dfrac{49}{12} \Rightarrow$ Το Π.Τ. της f είναι το $\left[-\dfrac{49}{12},+\infty\right)$

Άρα το Π.Ο. της $f^{-1}(x)$ είναι το $\left[-\dfrac{49}{12},+\infty\right)$

(iv) $f(x)= x-5x^2,\ x \geq 1$

Έστω $y= x-5x^2= -5\left(x^2-\frac{x}{5}\right)= -5\left[\left(x-\frac{1}{10}\right)^2-\frac{1}{100}\right]= -5\left(x-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{20}$ (2)

$\Rightarrow y-\frac{1}{20}=-5\left(x-\frac{1}{10}\right)^2 \Rightarrow \frac{1-20y}{100}=\left(x-\frac{1}{10}\right)^2 \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{1-20y}}{10}$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1+\sqrt{1-20x}}{10}$

Από την εξίσωση (2) παρατηρούμε ότι $y \leq \frac{1}{20} \Rightarrow$ Το Π.Τ. της f είναι το $\left(-\infty,\frac{1}{20}\right]$

Άρα το Π.Τ της f^{-1} είναι το $\left(-\infty,\frac{1}{20}\right]$

2.13 $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$, $f^{-1}(x)=2 \Rightarrow x = f(2) \Rightarrow x=\frac{8}{5}$

2.14 $f(x)=\frac{2x}{x+c}$, Η f έχει ως αντίστροφη τον εαυτό της $\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x}{x+c}$

Ξέρουμε ότι $(f \circ f^{-1})(x)=x\ \ \forall x \in R-\{-c\}$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{2x}{x+c}\right) \Leftrightarrow \frac{2\left(\frac{2x}{x+c}\right)}{\frac{2x}{x+c}+c}=x \Leftrightarrow \frac{\frac{4x}{x+c}}{\frac{2x+cx+c^2}{x+c}}=x \Leftrightarrow \frac{4x}{2x+cx+c^2}=x$$

$\Leftrightarrow 4x=2x^2+cx^2+c^2x \Leftrightarrow (2+c)x^2+(c^2-4)x=0,\ \forall x \in R-\{c\}$

$\Rightarrow 2+c=0$ και $(c^2-4)=0 \Rightarrow c= -2$